BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5 dans la version originale **et 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9 dans la version en caractères agrandis.**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.

Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

► la probabilité de tirer un objet rare est de 7 % ;

► si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % ;

► si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet.

On note :

- R l'événement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'événement « le joueur tire une épée » ;
- $\bar{R}$ et $\bar{E}$ les événements contraires des événements R et E.

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.
2. Calculer la probabilité de tirer une épée.
3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millième.

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.
2. Déterminer $P(X < 6)$. *Arrondir le résultat au millième.*
3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geq k) \geq 0,5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %. Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à $0,95$. Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. *On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.*

Exercice 2 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Les cinq questions sont indépendantes.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1. On considère les points $A(1;0;3)$ et $B(4;1;0)$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

a. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 \\ z = -3 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

b. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

c. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

d. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 \\ z = 3 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On considère la droite (d) de représentation paramétrique

$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 6t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite (d) ?

a. $M(7;6;6)$ **b.** $N(3;6;4)$ **c.** $P(4;6;-2)$ **d.** $R(-3;-9;7)$

3. On considère la droite (d') de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -2+3k \\ y = -1-2k \\ z = 1+k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Les droites (d) et (d') sont :

a. sécantes

b. non coplanaires

c. parallèles

d. confondues

4. On considère le plan (P) passant par le point $I(2;1;0)$ et perpendiculaire à la droite (d). Une équation du plan (P) est :

a. $2x+3y-z-7=0$

b. $-x+y-4z+1=0$

c. $4x+6y-2z+9=0$

d. $2x+y+1=0$

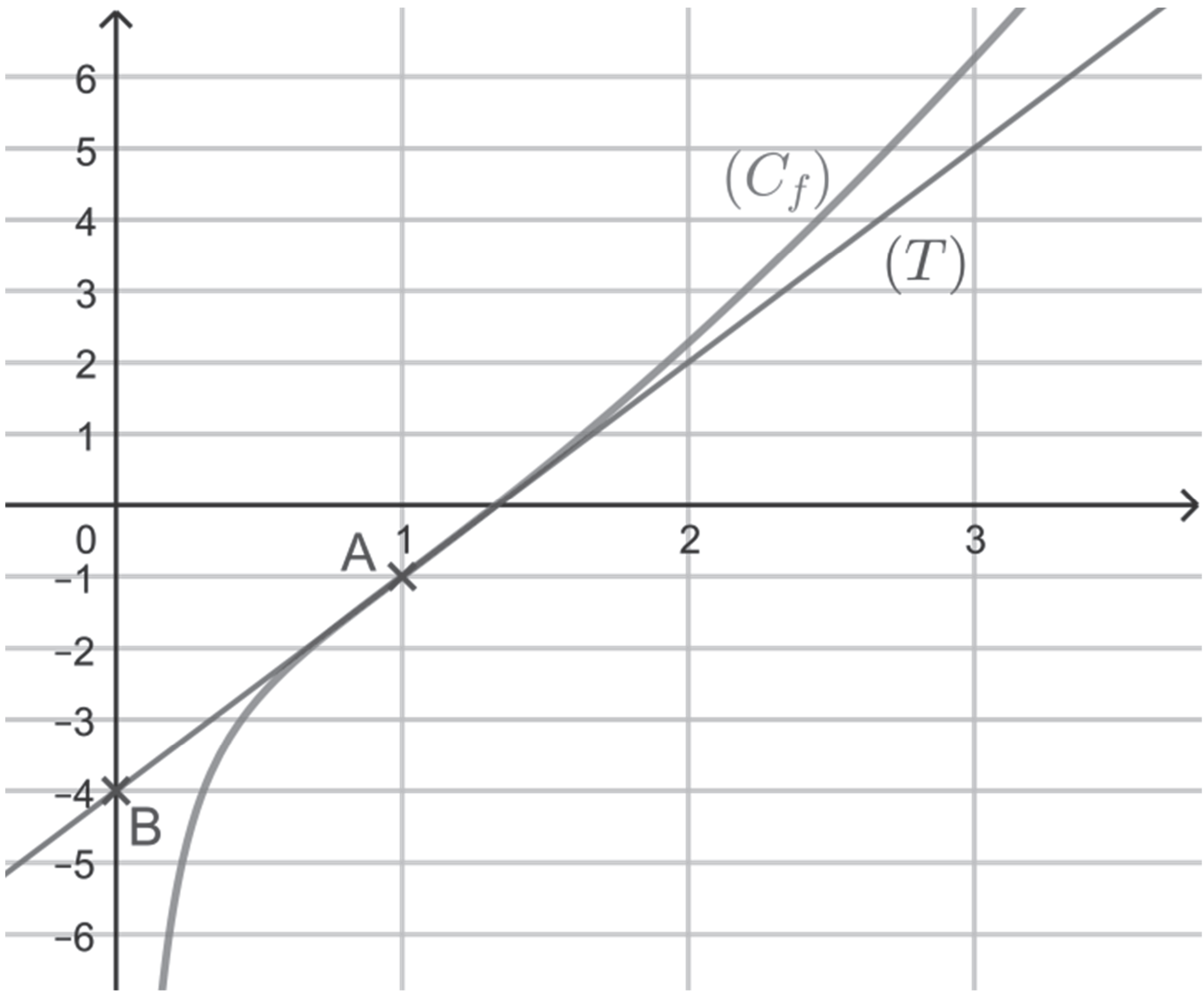
Exercice 3 **(5 points)**

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x^2) - \frac{1}{x}$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative (C_f) de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe (C_f) au point A de coordonnées $(1;-1)$. Cette tangente passe également par le point $B(0;-4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).

2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Que semble représenter le point A pour la courbe (C_f) ?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.

2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$,

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$$

3. **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b. Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b. Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

Exercice 4 (6 points)

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\mathrm{d}x$$

$$J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0 .

2. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geq 0$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

c. Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leq \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$$

c. Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n) .

4. a. En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - n\, J_n \qquad \text{et} \qquad I_n = \frac{1}{n}\, J_n$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $I_n = \frac{1+e^{-n\pi}}{n^2+1}$.

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à $0{,}1$. Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1   from math import *
2   def seuil():
3        n=0
4        I=2
5        . . .
6            n=n+1
7            I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8        return n
```