BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1. (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

Les quatre affirmations se placent dans la situation suivante :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points :

$$A(2\,;\ 1\,;-1),\ B(-1\,;\ 2\,;1) \text{ et } C(5\,;\ 0\,;-3).$$

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x + 5y - 2z + 3 = 0.$$

On note $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t + 3 \\ y = t + 2 \\ z = 2t + 1 \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 1 :

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (OAC).

Affirmation 2 :

Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont sécantes au point C.

Affirmation 3 :

La droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

Affirmation 4 :

Le plan médiateur du segment $[BC]$, noté Q, a pour équation cartésienne :

$$3x - y - 2z - 7 = 0.$$

On rappelle que le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

Exercice 2. (5 points)

Une entreprise fabrique des objets en plastique en injectant dans un moule de la matière fondue à 210°C. On cherche à modéliser le refroidissement du matériau à l'aide d'une fonction f donnant la température du matériau injecté en fonction du temps t. Le temps est exprimé en seconde et la température est exprimée en degré Celsius.
On admet que la fonction f cherchée est solution d'une équation différentielle de la forme suivante où m est une constante réelle que l'on cherche à déterminer :

$$(E) : \ y' + 0{,}02y = m$$

Partie A

1. Justifier l'affichage suivant d'un logiciel de calcul formel :

Entrée :	RésoudreEquationDifférentielle($y' + 0{,}02y = m$)
Sortie :	$\boxed{\rightarrow}$ $y = k * \exp(-0.02 * t) + 50 * m$

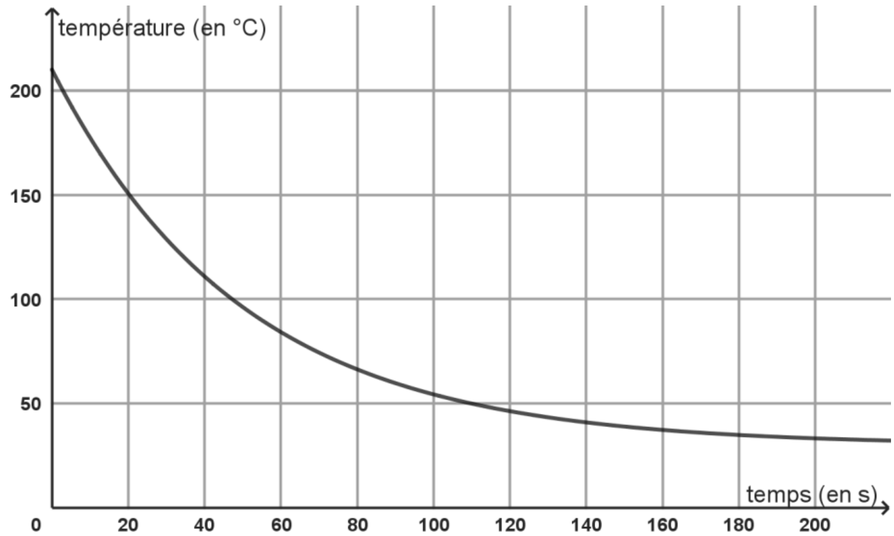
2. La température de l'atelier est de 30° C. On admet que la température $f(t)$ tend vers 30 lorsque t tend vers l'infini. Démontrer que $m = 0{,}6$.

3. Déterminer l'expression de la fonction f cherchée en tenant compte de la condition initiale $f(0) = 210$.

Partie B

On admet ici que la température (exprimée en degré Celsius) du matériau injecté en fonction du temps (exprimé en seconde) est donnée par la fonction dont l'expression et une représentation graphique sont données ci-dessous :

$$f(t) = 180\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30$$



1. L'objet peut être démoulé lorsque sa température devient inférieure à 50° C.
   a. Par lecture graphique, donner une valeur approchée du nombre T de secondes à attendre avant de démouler l'objet.
   b. Déterminer par le calcul la valeur exacte de ce temps T.
2. À l'aide d'une intégrale, calculer la valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes.

Exercice 3. (5 points)
Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles.

Partie A

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face ».

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

2. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X = k)$				

Partie B

Voici les règles d'un jeu où le but est d'obtenir trois pièces du côté « Face » en un ou deux essais :

- On lance trois pièces équilibrées :
  - Si les trois pièces sont tombées du côté « Face », la partie est gagnée ;
  - Sinon, les pièces tombées du côté « Face » sont conservées et on relance celles tombées du côté « Pile ».
- La partie est gagnée si on obtient trois pièces du côté « Face », sinon elle est perdue.

On considère les événements suivants :

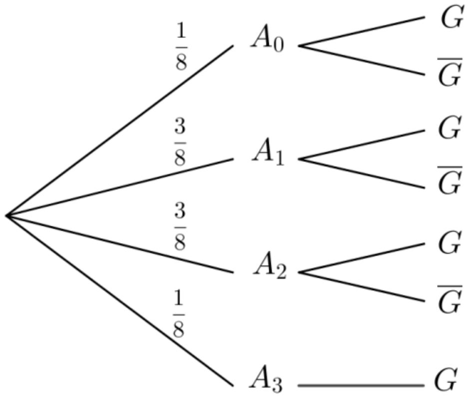
- G: « la partie est gagnée ».

Et pour tout entier k compris entre 0 et 3, les événements :

- A_k : « k pièces sont tombées du côté « Face » au premier lancer ».

1. Démontrer que $P_{A_1}(G) = \frac{1}{4}$.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. Démontrer que la probabilité p de gagner à ce jeu est $p = \frac{27}{64}$.

4. La partie a été gagnée. Quelle est la probabilité qu'exactement une pièce soit tombée du côté « Face » à la première tentative ?

5. Combien de fois faut-il jouer à ce jeu pour que la probabilité de gagner au moins une partie dépasse 0,95 ?

Exercice 4. (6 points)

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.
Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}.$$

Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = ...
    for i in range(n):
        ...
    return u
```

2. L'exécution de `suite(2)` renvoie `1.3333333333333333`.
Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.

3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
>> suite(2)
1.3333333333333333
>> suite(5)
1.0058479532163742
>> suite(10)
1.0000057220349845
>> suite(20)
1.000000000005457
```

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;5[$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$$

3. **a.** Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty\,;5[$. Prouver l'équivalence suivante :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0.$$

b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty\,;5[$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

5. Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme terme initial $u_0 = 4$ au lieu de $u_0 = 3$?