

# Mathématiques

Accompagnement  
personnalisé

## Raisonner à l'aide du calcul littéral pour comparer des aires

**Domaine :** Les langages pour penser et communiquer

**Sous domaine :** Comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques, scientifiques et informatiques

**Compétences mathématiques :** Chercher, calculer, raisonner

**Références au programme :** Utiliser une expression littérale pour exprimer une mesure géométrique. Savoir factoriser.

### Objectifs

- Réinvestir les notions liées aux figures planes et les calculs d'aires.
- Réinvestir le calcul littéral dans une démarche de résolution de problème.

Ces pistes pour une séance d'AP peuvent constituer une réponse à la faible réussite d'une classe ou d'un groupe d'élèves aux outils de positionnement pour la classe de 4<sup>e</sup> « utiliser le calcul littéral »<sup>1</sup>. La résolution de ce problème requiert la mise en expression d'une mesure géométrique ainsi que la manipulation et la comparaison d'expressions littérales. Elle vise également le réinvestissement de la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition à travers une factorisation essentielle à la résolution du problème.

<sup>1</sup> Outils de positionnement pour la classe de 4<sup>e</sup>

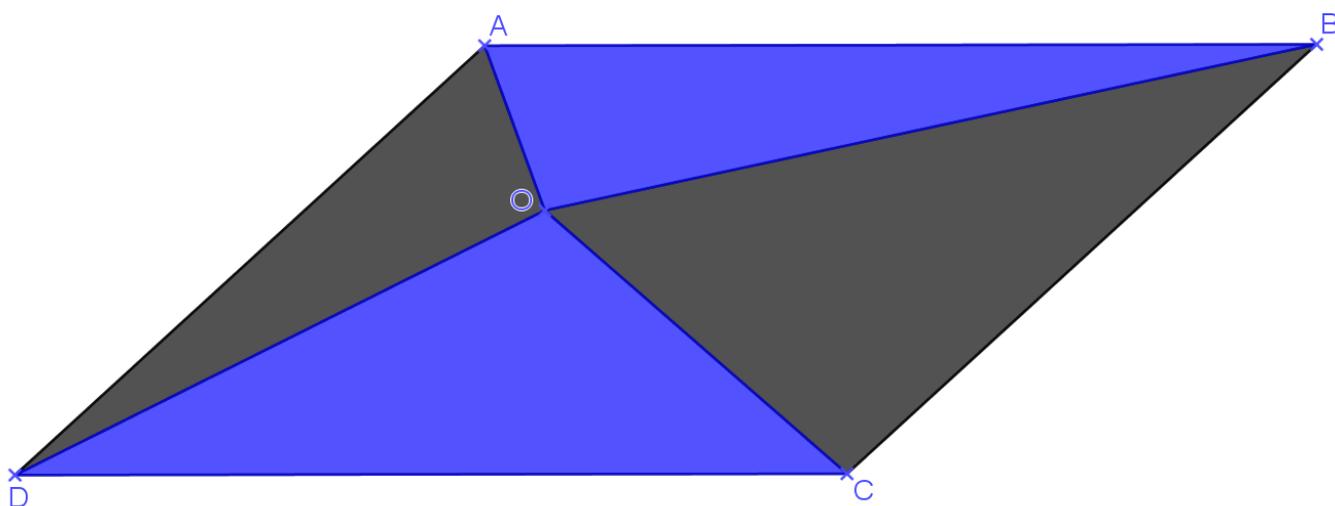
Fiche élève : <https://eduscol.education.fr/document/46624/download>

Fiche professeur : <https://eduscol.education.fr/document/46627/download>

## Modalités

- 55 minutes ;
- l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique semble préférable ;
- travail en autonomie avec des phases d'échanges en groupe de deux, trois ou quatre élèves ;
- pour les élèves : matériel de géométrie (crayon de papier, règle, compas ou équerre).

## Énoncé de l'activité d'AP



Soit O un point à l'intérieur d'un parallélogramme ABCD.

Comparer l'aire de la partie noire (les triangles AOD et BOC) et l'aire de la partie bleue (les triangles AOB et DOC).

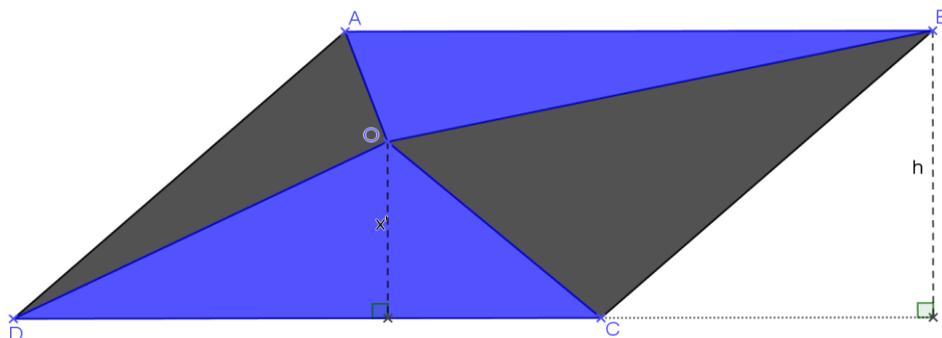
## Commentaires de l'activité

### Analyse a priori

**Quelles procédures les élèves peuvent-ils utiliser pour résoudre la tâche ?**

Pour résoudre l'activité, les élèves peuvent suivre la démarche suivante :

- construire une figure ;
- nommer et coder les différentes hauteurs ;



- donner l'expression de l'aire du parallélogramme ;
- donner l'expression de l'aire du triangle OCD ;
- donner l'expression de l'aire du triangle ABO ;
- utiliser le parallélisme des côtés du parallélogramme pour démontrer que les pieds des hauteurs des triangles OCD et ABO, issues de O, sont alignés avec le point O ;
- calculer l'aire de la partie bleue ;
- factoriser cette aire ;
- comparer l'expression obtenue avec l'aire du parallélogramme et conclure sur l'égalité des aires.

### Quelles erreurs les élèves risquent-ils de faire ? Quels obstacles peuvent-ils rencontrer ?

L'articulation entre la géométrie et le calcul littéral peut bloquer certains élèves. La mise en évidence des hauteurs et le rappel de la formule de l'aire du triangle peuvent permettre à certains élèves d'entrer en activité. On peut, au préalable, effectuer des activités flash sur des calculs d'aires de figures usuelles de la classe de cinquième.

La première difficulté est de choisir les dimensions du parallélogramme à construire. De nombreux élèves risquent de ne pas comprendre les différences de statuts des lettres en jeu dans la situation :

- d'une part les paramètres qui correspondent aux dimensions du parallélogramme ;
- d'autre part les variables qui correspondent aux hauteurs des triangles.

Il s'agit donc pour les élèves de comprendre que si l'élève va fixer des paramètres pour construire sa figure, il doit considérer le point O comme mobile, et donc les hauteurs de triangles issues de O comme des variables. Des élèves peuvent, également, peiner à établir des relations entre les différentes variables : par exemple, entre les hauteurs des triangles ODC et OAB et la hauteur du parallélogramme. Le passage à la construction de la figure par un logiciel de géométrie dynamique lors de l'étape de la conjecture permet de déplacer le point O. L'élève peut ainsi observer l'évolution, en fonction de la position de O, des variables comme les hauteurs.

Une nouvelle difficulté peut apparaître en fin de résolution de ce problème : des élèves peuvent vouloir calculer les aires de OAD et OBC en utilisant la seconde hauteur et les autres côtés du parallélogramme, sans remarquer qu'il suffit de soustraire l'aire de la surface bleue à celle du parallélogramme.

## Quelle remédiation ?

Plusieurs phases de mise en commun doivent rythmer l'activité pour accompagner les élèves et s'assurer de leur mise en activité. En particulier, après une première phase de recherche, un choix de variables doit être partagé avec la classe pour permettre à tous les élèves d'entrer dans la tâche de production d'expressions littérales. La modélisation d'une situation est en effet un des enjeux importants de cette activité.

On peut proposer à certains élèves rencontrant de grandes difficultés de commencer avec des valeurs numériques avant de produire une formule générale.

## Déroulé

Phase	Conseils pour la mise en œuvre
<b>Phase 1</b> Questions <i>flash</i> <i>Individuel puis</i> <i>classe entière</i>	<p>S'assurer que les élèves sont capables :</p> <ul style="list-style-type: none"><li>de produire une expression littérale à partir d'une figure simple (par exemple, exprimer la longueur AB en fonction de <math>x</math>)</li></ul>  <ul style="list-style-type: none"><li>d'appliquer la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition dans le sens de la factorisation.</li></ul>
<b>Phase 2</b> Compréhension de l'énoncé, conjectures et amorce de la recherche <i>Individuel puis</i> <i>classe entière</i>	<p>L'énoncé est lu à voix haute par un élève puis relu par le professeur, en s'assurant que tous les élèves ont compris l'énoncé.</p> <p>Les élèves sont invités à utiliser un logiciel de géométrie dynamique afin de construire la figure. La manipulation du point O doit leur permettre d'établir une conjecture sur les proportions des différentes aires colorées et éventuellement de déconstruire leurs fausses représentations.</p> <p>Il est important de laisser le temps aux élèves de tâtonner et d'élaborer leurs procédures, même s'il s'agit d'impasses ou de procédures coûteuses en temps.</p> <p>L'enseignant profite de ce moment pour remobiliser le vocabulaire de géométrie (parallélogramme, hauteur, triangle, longueur, etc.), les propriétés de ces figures ainsi que les formules d'aires des figures planes concernées.</p>
<b>Phase 3</b> 1 <sup>re</sup> mise en commun <i>En groupe, au</i> <i>moins en binôme</i>	<p>On s'appuie sur la figure affichée au tableau. La classe fait émerger les informations manquantes pour calculer les aires. Cette phase permet aussi d'utiliser les mêmes notations, notamment pour les hauteurs, ce qui facilite la correction. On laisse ces notations sur la figure au tableau.</p> <p>On montre à la classe que la somme des hauteurs issues de O des deux triangles bleus est égale à la hauteur du parallélogramme si les hauteurs issues de O des deux triangles bleus sont confondues. On leur demande de</p>

	le démontrer que ces hauteurs sont confondues (autrement dit, que les pieds de ces deux hauteurs sont alignés avec le point O).
<b>Phase 4</b> Recherche <i>Individuel puis en groupe, au moins en binôme</i>	Les élèves peuvent ensuite travailler en autonomie afin de produire des expressions littérales des aires des figures concernées. Après un temps de recherche, on peut de nouveau guider les élèves en interrogeant la classe sur les aires qu'ils ont déjà exprimées. Le but est d'arriver à faire exprimer les aires des deux triangles de la même couleur, puis l'aire totale du parallélogramme en fonction des longueurs choisies.
<b>Phase 5</b> 2 <sup>e</sup> mise en commun <i>En groupe, au moins en binôme</i>	On demande à trois élèves de présenter les démarches et les productions de leur groupe. Une mise en commun des expressions littérales des aires du parallélogramme et des deux triangles permet de remédier aux difficultés et s'accorder sur les expressions à simplifier.
<b>Phase 6</b> Recherche <i>Individuel puis en groupe, au moins en binôme</i>	Les élèves doivent ensuite simplifier la somme des aires des deux triangles en la factorisant.  Il reste ensuite à comparer ces aires. Plusieurs procédures sont disponibles. Certains élèves peuvent ne pas percevoir de manière immédiate que l'aire colorée est la moitié de celle du parallélogramme complet. Dans ce cas, il est possible de soustraire la somme obtenue de l'aire du parallélogramme, pour obtenir l'aire des deux autres triangles et constater l'égalité.
<b>Phase 7</b> 3 <sup>e</sup> mise en commun <i>En groupe, au moins en binôme puis classe entière</i>	La mise en commun fait présenter aux élèves leurs procédures. Si différentes procédures émergent des groupes, on demande à deux ou trois élèves d'écrire les calculs au tableau.  Une synthèse écrite peut être proposée en mettant en avant les propriétés de la distributivité utilisées ici.

## Verbalisation

- Demander aux élèves de verbaliser les propriétés des figures planes et des aires à la classe.
- Demander aux élèves de verbaliser leurs méthodes de calculs au sein du groupe puis à la classe.
- Inciter les élèves à formuler et reformuler leurs réponses afin qu'ils emploient le lexique approprié : parallélogramme, aire, hauteur, somme, produit, différence, factorisation et propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.

## Trace écrite

Si l'enseignant juge opportun d'effectuer un bilan de l'activité, celui-ci peut être composé des expressions littérales des différentes aires engagées dans l'activité ainsi que du calcul de la somme

menant à l'aire de la surface bleue en rappelant qu'il s'agit d'une factorisation qui s'appuie sur la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.

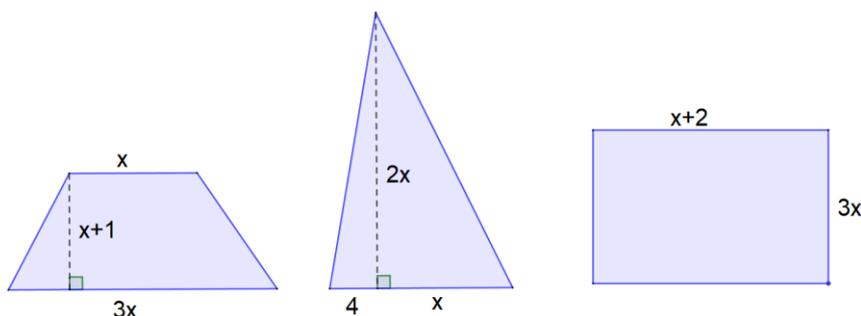
## Pistes de différenciation

### Aux élèves qui rencontrent des difficultés au fil de la résolution

Le professeur peut pour les élèves ayant des difficultés :

- proposer des questions intermédiaires explicites : « Quelle est la hauteur/la base des différentes figures ? », « Donner l'aire du parallélogramme en fonction de... », « donner l'aire du triangle OCD en fonction de... », « Exprimer la hauteur du triangle AOB en fonction de... » ;
- donner la figure préalablement construite aux élèves. Notamment pour qu'ils aient une figure d'une taille raisonnable afin de pouvoir l'annoter, ou même éventuellement qu'ils puissent recourir à la mesure, ce qui peut être un levier pour certains élèves. Les hauteurs des triangles AOB et COD peuvent être préalablement tracées sur cette figure ;
- signaler que la propriété de l'alignement entre les pieds des hauteurs issues de O des triangles ABO et OCD avec le point O n'est pas véritablement l'enjeu de cette activité ; elle peut donc être admise.

### Aux élèves les plus avancés en mathématiques



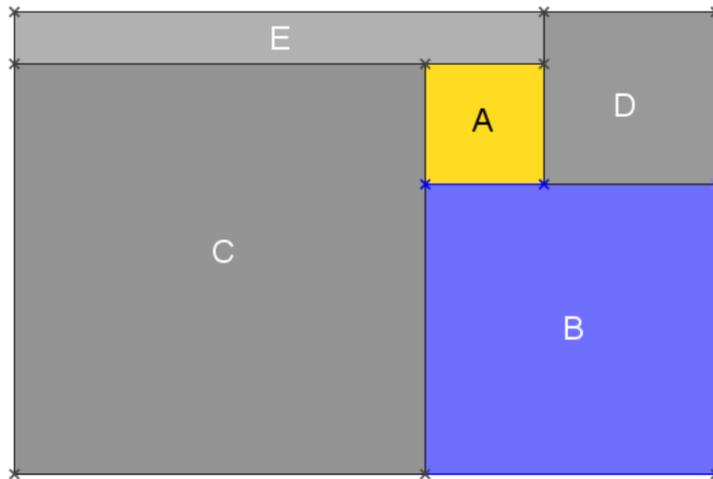
1. Exprimer l'aire de chacune des figures en fonction de  $x$ .
2. Montrer que la somme des aires de ces trois figures est la même que l'aire d'un rectangle dont l'un des côtés mesure  $3x$ .

# Pistes de prolongements

## Activités

### Activité 1 :

Le rectangle ci-dessous est composé des carrés A, B, C et D, ainsi que du rectangle E.



1. Lorsque le côté du carré A est 2 cm et celui du carré B est 5 cm, quelle est l'aire du rectangle E ?

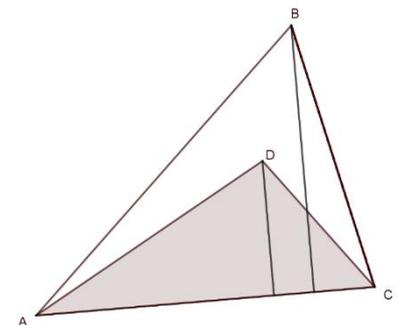
On appelle  $a$  le côté du carré A et  $b$  le côté du carré B.

2. Exprimer les dimensions des carrés C et D en fonction de  $a$  et de  $b$ .
3. Exprimer l'aire du rectangle E en fonction de  $a$  et de  $b$ . Donner la réponse sous forme d'une expression développée et réduite.
4. Exprimer l'aire du grand rectangle en fonction de  $a$  et de  $b$ .

### Activité 2 :

La hauteur du triangle ABC issue de B vaut le double de la hauteur du triangle ADC issue de D.

Démontrer que l'aire du triangle ACD vaut l'aire du quadrilatère ADCB.



### Activité 3 :

Deux cônes de révolution ont la même base. La hauteur de l'un vaut le double de la hauteur de l'autre. Démontrer que le volume du petit cône vaut le volume du solide délimité par la face latérale du petit cône et la face latérale du grand cône.

