

Mathématiques

Accompagnement
personnalisé

Utiliser des indicateurs statistiques pour résoudre un problème

Domaine : Organisation et gestion de données

Sous domaine : Interpréter, représenter et traiter des données

Compétences mathématiques : Chercher, raisonner, communiquer

Références au programme : Traiter des données grâce aux caractéristiques de position et de dispersion au programme du cycle 4 (médiane, moyenne et étendue) et aux pourcentages.

Objectifs

- Réinvestir la médiane, la moyenne et l'étendue dans une démarche de résolution de problème.

Ces pistes pour une séance d'AP peuvent constituer une réponse à la faible réussite d'une classe ou d'un groupe d'élèves aux exercices 5 et 7 des outils de positionnement à mi-parcours « Organisation et gestion de donnée »¹ pour la classe de 4^e. Cette tâche à prise d'initiatives² a pour but la reconstitution d'une série statistique à l'aide des indicateurs du cycle 4. Elle vise la remobilisation des caractéristiques de position et de dispersion sous un autre angle que celui des tâches habituelles de détermination de ces indicateurs.

¹ Outils de positionnement pour la classe de 4^e

Fiche élève : <https://eduscol.education.fr/document/46618/download>

Fiche professeur : <https://eduscol.education.fr/document/46621/download>

² Document ressource Eduscol « Types de tâches ». <https://eduscol.education.fr/document/17194/download>

Modalités

- 55 minutes ;
- travail en groupe (2, 3, 4 élèves) ;
- l'usage de la calculatrice est indispensable pour que soient clairement identifiés les enjeux de l'activité.

Énoncé de l'activité d'AP

13 salariés travaillent dans une entreprise : 6 femmes et 7 hommes.

On dispose de la série statistique des salaires des hommes ainsi que de celle, incomplète, des salaires des femmes. Les salaires qui composent ces deux séries sont classés dans l'ordre croissant.

Salaires des hommes (€)
1 270
1 598
2 070
2 155
2 823
2 912
3 972

Salaires des femmes (€)
?
1 247
?
1 345
?
?

On dispose également des informations suivantes :

- L'étendue de la série statistique de tous les salaires de l'entreprise est 2 772 € ;
- L'étendue de la série statistique des salaires des femmes dans l'entreprise est 900 € ;
- La médiane de la série statistique de tous les salaires de l'entreprise est 1 870 € ;
- La moyenne des salaires des femmes est 1 512 €.

Déterminer les quatre salaires manquants. Justifier.

Commentaires de l'activité

Analyse a priori

Quelles procédures les élèves peuvent-ils utiliser pour résoudre la tâche ?

Nous noterons F_1 , F_2 , F_3 et F_4 les salaires à déterminer.

Étape 1 : Le salaire le plus élevé est-il un salaire de femme ou un salaire d'homme ?

Le salaire de femme le plus élevé est inconnu ; le salaire d'homme le plus élevé est 3 972 €. Le plus élevé des salaires de

Salaires des hommes (€)	Salaires des femmes (€)
1 270	$F_1 = 1200$
1 598	1 247
2 070	$F_2 = 1310$
2 155	1 345
2 823	$F_3 = 1870$
2 912	$F_4 = 2100$
3 972	

femmes ne peut être supérieur à la somme du second salaire de femme et de l'étendue de la série des salaires des femmes :

$$1\,247\text{ €} + 900\text{ €} = 2\,147\text{ €} \text{ et } 2\,147\text{ €} < 3\,972\text{ €}$$

Étape 2 : Calculons F1

Pour calculer le plus petit salaire de femme, on retranche au plus haut salaire de la série de l'ensemble des salaires l'étendue de cette série.

$$F1 = 3\,972\text{ €} - 2\,772\text{ €} = 1\,200\text{ €}$$

Comme le plus bas salaire des hommes est 1 270 €, 1 200 € est le salaire d'une femme.

Étape 3 : Calcul de F4

$$F = 1\,200\text{ €} - 900\text{ €} = 2\,100\text{ €}$$

Étape 4 : Détermination de F3

La médiane de la série statistique de tous les salaires est 1 870 €. Comme l'effectif de la série de tous les salaires est 13, sa médiane est la 7^e valeur. La 7^e valeur est un des salaires de femmes inconnu.

Classons dans l'ordre les sept premiers salaires :

1 ^{er} salaire	2 ^e salaire	3 ^e salaire	4 ^e salaire	5 ^e salaire	6 ^e salaire	7 ^e salaire
1 200 €	1 247 €	F2 ou 1 270 €	F2 ou 1 270 €	1 345 €	1 598 € ou F3	1 598 € ou F3

Le 7^e salaire étant la médiane, il est égal à 1 870 € et ne peut pas être égal à 1 598 €, ainsi F3 est la médiane de la série des salaires, soit 1 870 €.

Étape 5 : Détermination de F2

On utilise l'information suivante : « La moyenne des salaires des femmes est 1 512 € ».

On peut désormais trouver le salaire manquant, par essais-erreurs ou en résolvant une équation :

$$\frac{1\,200\text{ €} + 1\,247\text{ €} + x + 1\,345\text{ €} + 1\,870\text{ €} + 2\,100\text{ €}}{6} = 1\,512\text{ €}$$

On se ramène à

$$\frac{7\,762 + x}{6} = 1\,512\text{ €}$$

$$x = 1\,310\text{ €}$$

Quelles erreurs les élèves risquent-ils de faire ? Quels obstacles peuvent-ils rencontrer ?

- Une erreur courante est due à la confusion entre l'étendue de la série des salaires des hommes, l'étendue de la série des salaires des femmes et l'étendue de la série de l'ensemble des salaires de l'entreprise.
- Pour utiliser la 1^{re} information, il faut montrer que le plus haut salaire de la série est un salaire d'homme : 3 972 €. Cela requiert de ne pas omettre la 1^{re} étape de la résolution proposée ci-dessus.

Quelle remédiation ?

Pour aider les élèves, on peut proposer les questions suivantes :

- Le plus haut salaire dans cette entreprise est-il un salaire d'homme ou de femme ? Et le plus bas ?
- À partir de l'étendue et d'un des salaires extrêmes, peut-on connaître l'autre salaire extrême ? Il est possible de s'appuyer sur l'exemple de la série des salaires des hommes dont on connaît les valeurs.
- Comment déterminer la médiane d'une série à effectif pair ? Comment déterminer la médiane d'une série à effectif impair ?

Déroulé

Phase	Conseils pour la mise en œuvre
Phase 1 Questions <i>flash</i> <i>Individuel puis</i> <i>classe entière</i>	S'assurer que les élèves savent : <ul style="list-style-type: none">• calculer l'étendue d'une série simple ;• calculer la médiane d'une série à effectif impair.
Phase 2 Compréhension de l'énoncé et amorce de la recherche <i>Individuel puis</i> <i>classe entière</i>	Avant d'autoriser le travail de groupe, laisser le temps à chaque élève de s'approprier l'énoncé et de s'engager dans la résolution du problème. S'assurer que tous les élèves ont compris l'énoncé, par exemple en leur demandant de le reformuler.
Phase 3 Recherche <i>En groupe, au</i> <i>moins en binôme</i>	Laisser le temps aux élèves de tâtonner et d'élaborer leurs procédures, même s'il s'agit d'impasses ou de procédures coûteuses en temps. Préciser que l'énoncé présente trois séries statistiques : celle des salaires des hommes, celle des salaires des femmes et celle de l'ensemble des salaires.
Phase 4 1 ^{re} mise en commun <i>Classe entière</i>	Organiser une discussion collective autour de la question suivante : « Pour chacune des informations, peut-on directement trouver un salaire de femme manquant ? » Faire présenter la procédure qui permet de trouver le salaire inconnu $F1$. Si ce n'est pas fait par les élèves, expliquer pourquoi il est nécessaire de justifier que le plus haut salaire est un salaire d'homme. Laisser les procédures apparentes aux tableaux. Lancer les élèves dans la recherche de $F4$ (grâce à l'étendue de la série des salaires des femmes) et de $F3$ (grâce à la médiane).

<p>Phase 5 Recherche <i>En groupe, au moins en binôme</i></p>	<p>Pour $F4$, rappeler aux élèves qui rencontrent des difficultés que la méthode ressemble à celle qui a permis de trouver $F1$.</p> <p>Pour $F3$:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Laisser le temps aux élèves de tâtonner et d'élaborer leurs procédures, même s'il s'agit d'impasses ou de procédures coûteuses en temps. • Préciser si besoin qu'il est préférable de calculer $F3$ avant de déterminer $F2$. • Présenter ou faire présenter au tableau pendant cette phase de recherche la manière dont on range dans l'ordre croissant les valeurs de la série de l'ensemble des salaires.
<p>Phase 6 2^e mise en commun <i>Classe entière</i></p>	<p>Faire présenter à un élève sa procédure lui permettant de trouver $F3$ grâce à l'information sur la médiane.</p> <p>Lancer les élèves dans la recherche du dernier salaire inconnu $F2$ en précisant que seule une information n'a pas encore servi.</p>
<p>Phase 7 Recherche <i>En groupe, au moins en binôme</i></p>	<p>Conseiller aux élèves d'utiliser leur calculatrice.</p> <p>Choisir sur les cahiers d'élèves des écritures différentes et représentatives du calcul de la moyenne (point d'interrogation ou lettre pour désigner l'inconnue, trait de fraction ou symbole « : », en une ligne ou en plusieurs lignes...), les présenter au tableau et montrer que ces écritures permettent de déterminer le même objet mathématique.</p>
<p>Phase 8 3^e mise en commun <i>Classe entière</i></p>	<p>Faire expliquer la procédure par essais-erreurs. Montrer comment l'expression de la moyenne écrite au tableau peut être simplifiée.</p> <p>La résolution de l'équation par les propriétés de conservation du signe « = » peut apparaître dans la mise en commun si, bien sûr, elle a préalablement été étudiée en classe et si l'enseignant juge que cette technique de résolution n'est dans ce cas pas trop ardue pour ses élèves.</p>

Verbalisation

- Demander aux élèves de verbaliser leurs procédures face à la classe.
- Inciter les élèves à formuler et reformuler leurs réponses afin qu'ils emploient le lexique approprié : effectif, étendue, médiane, moyenne, inconnue...

Trace écrite

La trace écrite pourra être composée de la diversité des procédures retenues par l'enseignant lors de la mise en commun. L'enseignant jugera au regard de sa progression annuelle et de la dynamique de classe s'il est judicieux de mettre en exergue ou d'introduire la procédure experte de résolution d'équation dans la trace écrite.

Cette activité de réinvestissement peut se conclure par un bilan : rappel des définitions de série statistique, d'étendue, de médiane et de moyenne.

Pistes de différenciation

Aux élèves qui rencontrent des difficultés

- Modifier en amont l'énoncé et leur indiquer par exemple que le plus haut salaire est un salaire d'homme ;
- Modifier l'énoncé en donnant directement le plus bas et le plus haut salaire de femmes et en retirant les deux premières informations (étendue de la série de l'ensemble des salaires et étendue de la série des salaires des femmes) ;
- Distribuer des fiches *rappels*, au fil de la résolution, qui précisent comment déterminer les indicateurs statistiques.

Aux élèves les plus avancés en mathématiques

- Proposer un énoncé de l'activité plus compliqué, sans changer les résultats du problème. Par exemple en remplaçant la dernière information (« La moyenne des salaires des femmes est 1 512 € ») par « **La moyenne des salaires des femmes est 37 % inférieure à la moyenne des salaires des hommes.** »
- Proposer, s'ils ont terminé avant les autres, de résoudre un exercice au contexte proche dans lequel la série à reconstituer est d'effectif pair. Par exemple :

Fathia a été évaluée huit fois en mathématiques. Elle se souvient de sept notes sur les huit :

13 ; 14 ; 14 ; 17 ; 19 ; 19 ; 20

Les huit notes sont sur 20. Elle sait également que la médiane de la série des huit notes est 16,5. Trouve la note manquante.

Pistes de prolongement

Activités/Exercices

Problèmes d'analyse et de comparaison de séries faisant intervenir les indicateurs statistiques du cycle 4

Problème 4 (p36) et problème 5 (p39) du guide : « [La résolution de problèmes mathématiques au collège](#) ».

Exercices dont la résolution engage les raisonnements travaillés dans l'activité

Exercice 1 :

Donner deux séries statistiques dont l'étendue est 13,1, la médiane est 10 et l'effectif est 5.

Exercice 2 : Inspiré de DNB Métropole-Antilles Guyane — 2013

Les informations suivantes concernent les salaires des hommes et des femmes d'une même entreprise :

Salaire des hommes	Salaires des femmes
Effectif total : 20	1 200 € ; 1 230 € ; 1 250 € ;
Étendue : 2 400 €	1 310 € ; 1 376 € ; 1 400 € ;
Médiane : 2 000 €	1 440 € ; 1 500 € ; 1 700 € ;
Les salaires des hommes sont tous différents.	2 100 €.

1. Le plus bas salaire de l'entreprise est 1 000 €. Quel est le salaire le plus élevé ?
2. Dans cette entreprise, combien de personnes gagnent plus de 2 000 € ?

Exercice 3 :

Julie a obtenu sept notes sur 20 en français. Sa moyenne est 13, sa médiane est 12, sa note la plus basse est 8 et l'étendue de la série des notes est 12. Avec ces informations, peut-on retrouver les cinq notes ? Justifier.

Ressource complémentaire

« [La résolution de problèmes mathématiques au collège](#) » collection *Les guides fondamentaux pour enseigner*. Eduscol