MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
*Liberté*
*Égalité*
*Fraternité*

CYCLES 2 3 4 | Classe de quatrième

# Mathématiques

Accompagnement personnalisé

# Élaborer un raisonnement à partir d'une figure codée

**Domaine :** Espace et géométrie

**Sous domaine :** Utiliser des notions de géométrie plane pour démontrer

**Compétences mathématiques :** Chercher, calculer, raisonner, communiquer

**Références au programme :** Mener des raisonnements et s'initier à la démonstration en utilisant les propriétés des figures, des configurations et des transformations

## Objectifs

- Utiliser le codage d'une figure tracée à main levée pour déterminer une nature de figure géométrique sans instruments et sans mesures, mais avec un raisonnement déductif.
- Produire un raisonnement déductif, en organisant les étapes de sa recherche, de façon à produire la preuve d'un résultat géométrique qu'on ne peut pas percevoir par un tracé instrumenté.

Ces pistes pour une séance d'AP peuvent constituer une réponse à la faible réussite d'une classe ou d'un groupe d'élèves à l'exercice 7 des outils de positionnement mi-parcours « Géométrie »[1] pour la classe de 4e . Cette tâche à prise d'initiatives[2] consiste en l'analyse du codage d'une figure complexe dessinée à main levée, pour établir la nature d'un triangle. Elle nécessite une bonne mobilité du regard sur une figure géométrique pour y percevoir les figures juxtaposées, mais aussi les figures superposées. Du point de vue des connaissances nécessaires, elle fait mobiliser les

[1] Outils de positionnement pour la classe de 4e
Fiche élève : https://eduscol.education.fr/document/46612/download
Fiche professeur : https://eduscol.education.fr/document/46615/download
[2] Document ressource Eduscol « Types de tâches ». https://eduscol.education.fr/document/17194/download

natures et les propriétés géométriques des triangles et des quadrilatères particuliers, ainsi que la notion d'alignement et les calculs de mesures d'angle. La notion de triangles égaux peut être mobilisée à bon escient dans certaines étapes du raisonnement.

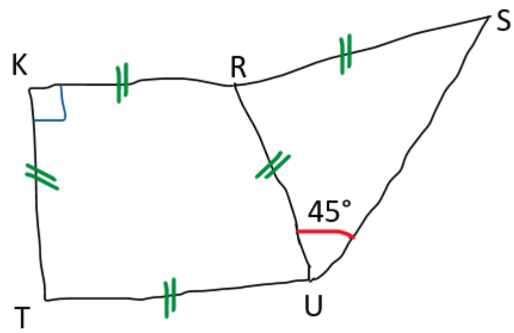
# Modalités

- 55 minutes;
- Travail en groupe (2, 3, 4 élèves);
- Bien que le calcul ne fasse pas partie des objectifs de cette tâche, la calculatrice ne semble pas nécessaire en raison du registre des opérations à effectuer, qui s'effectuent toutes de tête ou en ligne.

# Énoncé de l'activité d'AP

La figure ci-contre a été tracée à main levée.

Quelle est la nature du triangle KUS ? Justifier.




# Commentaires de l'activité

La figure à main levée peut être simplement dessinée au tableau ou photocopiée sur un support papier. Il faut cependant veiller à ne pas mettre en évidence l'alignement des points K, R et S, la nature du quadrilatère KRUT ou celle du triangle RSU. Le fait que les figures soient déformées, avec des tracés assez maladroits, doit décourager le recours à la mesure et aux instruments sur la figure de l'énoncé.

L'objectif est à expliciter aux élèves dès le lancement de cette activité : le but n'est pas de tracer la figure, mais d'élaborer un raisonnement à partir des propriétés codées sur le dessin pour déterminer la nature du triangle KUS. Avant de lancer les élèves dans la suite de la recherche, on peut faire verbaliser qu'une figure réalisée avec règle, équerre, rapporteur et compas (pourvu qu'on la trace correctement et précisément) ou encore une figure réalisée sur un logiciel de géométrie (pourvu qu'on trouve un protocole de construction valide) apporterait la réponse pour le cas représenté, mais ne suffit pas pour le démontrer pour l'ensemble des figures de ce type. L'activité ne se place pas en géométrie instrumentée, mais en géométrie déductive.

Après un court temps d'appropriation personnelle, une mise en commun peut servir à rappeler ce qui peut être codé sur une figure à main levée. Des questions peuvent émerger sur le fait que le triangle KUS n'est pas tracé : la discussion doit aider à lever cet obstacle, péciser qu'on peut ajouter des éléments sur un schéma à main levée pour mieux visualiser une figure, puis faire émerger l'idée qu'en mobilisant ses connaissances et les propriétés géométriques perçues grâce au codage, on peut établir certaines relations géométriques (alignement, milieux, parallélisme, perpendicularité, etc). Lors de cette mise en commun, on peut repréciser quel type de réponse on peut apporter à la question « quelle est la nature d'un triangle ? », on peut attirer le regard des élèves sur les différents polygones représentés sur ce schéma à main levée (triangles déjà tracés ou à imaginer). Le professeur s'assure que tous visualisent aussi des quadrilatères (ceux qui sont tracés, ou ceux qui ne le sont pas comme RSUT) de façon à leur permettre de porter un regard géométrique sur le dessin qu'ils ont devant eux (et non par exemple un regard critique sur des tracés imprécis, « pas droits », etc.).

## Analyse a priori

**Quelle procédure correcte les élèves peuvent-ils utiliser pour résoudre la tâche ?**

*Étape 1*

Établir la nature du triangle RSU et celle du quadrilatère KRUT.

- RSU est un triangle isocèle en R, donc ses angles à la base sont égaux, ils mesurent tous les deux 45°. Comme la somme des trois angles d'un triangle est égale à 180°, on peut calculer son 3ᵉ angle :
  $\widehat{SRU} = 180° - 45° \times 2 = 180° - 90° = 90°$.

  On en déduit qu'en plus d'être isocèle, RSU est aussi rectangle en R.

- KRUT est un quadrilatère dont tous les côtés sont de même longueur, c'est donc un losange. Or, il possède un angle droit, par conséquent, KRUT est un carré (et il a donc tous ses angles droits).

*Étape 2*

Déduire des mesures d'angle obtenues à l'étape n° 1 que les points K, R, S sont alignés :

$\widehat{KRS} = \widehat{KRU} + \widehat{URS} = 90° + 90° = 180°$. L'angle $\widehat{KRS}$ est plat, donc les points K, R et S sont alignés.

Le triangle KUS est donc constitué de deux triangles rectangles et isocèles en R accolés par leur côté [RU].

*Étape 3 :*

Établir la nature du triangle KRU :

Puisque KRUT est un carré, le triangle KRU est aussi un triangle rectangle et isocèle en R, dont les angles à la base $\widehat{RKU}$ et $\widehat{RUK}$ valent 45°.

*Étape 4 :*

Déduire des natures des triangles KRU et RUS, celle du triangle KUS :

- KUS est un triangle isocèle en U.
  Par exemple : KRU et SRU sont des triangles isocèles et rectangles en R avec KR = RU = RS, ce sont donc des triangles égaux (c'est le second cas d'égalité de deux triangles : KRU et RUS ont chacun un angle droit compris entre deux côtés de longueur RU), donc leurs hypoténuses sont aussi de même longueur, ce qui assure que KUS est un triangle isocèle en U.
- KUS est un triangle rectangle en U.
  On peut achever ce raisonnement en calculant $\widehat{KUS}$ de deux manières différentes :
  - soit en ajoutant $\widehat{KUR}$ et $\widehat{RUS}$ pour trouver $\widehat{KUS}$ :
    $\widehat{KUS} = \widehat{KUR} + \widehat{RUS} = 45° + 45° = 90°$. Donc KUS est aussi rectangle en U.

- soit en utilisant l'alignement des points K, R et S pour en déduire les mesures des angles à la base du triangle KUS : $\widehat{SKU} = \widehat{RKU} = 45°$ et $\widehat{KSU} = \widehat{RSU} = 45°$, puis calculer le dernier angle : 180° – 45° × 2 = 180°– 90° = 90°.

L'ordre de certaines étapes de ce raisonnement peut être modifié sans aucune incidence sur sa validité. Le cas d'égalité n'est pas nécessaire pour conclure, mais il offre une manière assez simple de rédiger.

### Quelles erreurs les élèves risquent-ils de faire ? Quels obstacles peuvent-ils rencontrer ?

Le premier obstacle rencontré par les élèves est la difficulté à visualiser le triangle KUS qui n'est pas tracé. Même après l'ajout du segment [KU] sur la figure, le triangle reste un peu délicat à percevoir en raison de la présence de la médiane [RU] qui perturbe la vision « forme » d'un triangle, encore convoquée par de nombreux élèves en 4$^{e}$. L'orientation du triangle KUS (sommet principal en bas) est une autre difficulté pour la reconnaissance d'un triangle isocèle, qui est habituellement « posé sur sa base », avec son sommet principal en haut de la figure. La perception ou reconnaissance de l'angle droit du triangle KUS n'est pas non plus facilitée par cette orientation.

Un autre obstacle prévisible est la difficulté à percevoir l'alignement des points K, R et S, à savoir comment le prouver ou simplement ne pas percevoir la nécessité de le prouver.

Une difficulté à anticiper est que certains élèves ne concluent qu'une partie de la nature du triangle visé : soit simplement isocèle, soit seulement rectangle.

Le fait de ne pas percevoir ou de ne pas savoir justifier la nature du quadrilatère KRUT peut être un obstacle dans l'élaboration du raisonnement, dans la mesure où cela ne permet pas de déduire le fait que l'angle $\widehat{KRU}$ est droit.

### Quelle remédiation ?

Pour remédier aux difficultés à visualiser les différents éléments de cette figure complexe, le professeur peut organiser une discussion collective après le temps d'appropriation individuel. Ce temps doit permettre d'accompagner les élèves les moins à l'aise, en verbalisant qu'on s'autorise à ajouter des tracés et des codages sur une figure à main levée. Ces ajouts sont effectués en prévoyant qu'on garde une trace du raisonnement qui assure de la propriété codée (calcul ou restitution d'une connaissance de cours). Le professeur peut également encourager à tourner la feuille pour regarder la figure orientée autrement et voir des figures les unes dans les autres, etc.

Pour accompagner un élève à mobiliser les propriétés géométriques adaptées, une aide consiste à l'interroger sur ce qu'il obtiendrait s'il traçait avec ses instruments ou un logiciel de géométrie une figure possédant exactement les propriétés codées sur le schéma à main levée. Il peut même être encouragé à la tracer pour s'approprier les propriétés de la figure. L'utilisation des instruments de géométrie n'est pas demandée dans l'activité, mais elle demeure un levier pour les élèves les plus démunis. Il peut être demandé par la suite comment on aurait pu prévoir ce qu'on obtient par le tracé.

Pour accompagner un élève qui ne sait pas comment démarrer, un coup de pouce peut être de lui demander s'il peut trouver d'autres mesures d'angle que celle qui est donnée via le codage et d'expliquer comment il les obtient.

## Déroulé

<table>
<tr><th>Phase</th><th>Conseils pour la mise en œuvre</th></tr>
<tr><td>Phase 1<br>Questions flash<br>Individuel puis classe entière</td><td>S'assurer que les élèves :<br>• connaissent les différentes natures de triangle, sans toutefois insister ou mettre en évidence le fait qu'un triangle peut être en même temps rectangle et isocèle pour ne pas trop dévoiler d'éléments de la recherche ;<br>• savent mobiliser la somme des angles d'un triangle pour déterminer une mesure d'angle ;<br>• savent reconnaître un triangle isocèle à partir de ses angles.</td></tr>
<tr><td>Phase 2<br>Compréhension de l'énoncé et amorce de la recherche<br>Individuel puis classe entière</td><td>• Avant de lancer la recherche, laisser un temps de quelques minutes pour que chaque élève observe attentivement la figure et puisse s'approprier la tâche.<br>• S'assurer que tous les élèves ont compris l'énoncé, en faisant reformuler la consigne par la classe. À cette étape, il est important de faire verbaliser que l'usage des instruments ou d'un logiciel de géométrie permet de trouver la solution, mais que cela ne suffit pas à démontrer le cas général. L'enjeu de cet exercice est justement d'anticiper la nature de KUS sans avoir besoin de tracer la figure à l'aide d'instruments. Cela peut être aussi le moment de faire émerger qu'on peut déduire des codages d'une figure deux types informations : certaines concernent les longueurs, d'autres les mesures des angles.</td></tr>
<tr><td>Phase 3<br>Recherche<br>En groupe, au moins en binôme</td><td>• Laisser le temps aux élèves de réfléchir, de se lancer dans des calculs d'angles ou des raisonnements géométriques.<br>• Préciser qu'on peut ajouter des segments, prolonger des tracés, « sortir de la figure » ou passer en couleur certains éléments pour mieux visualiser les différentes figures géométriques présentes sur le schéma à main levée.<br>• On peut aussi ajouter des codages sur ce schéma, mais alors il faut penser à une justification par une propriété mathématique connue et garder des traces des étapes de son raisonnement.</td></tr>
<tr><td>Phase 4<br>1<sup>re</sup> mise en commun<br>Classe entière</td><td>• Organiser une discussion collective en demandant : quelles propriétés géométriques ont été identifiées, quelles figures ont été reconnues. Les justifications ne doivent pas encore être verbalisées, l'objectif est de s'assurer que l'ensemble des élèves a commencé à chercher des arguments, des éléments de preuve pour pouvoir se prononcer sur la nature des figures représentées.<br>• Faire formuler qu'il peut être nécessaire de donner la nature d'autres figures que le triangle KUS avant celle de celui-ci.<br>• Relancer la phase de recherche après avoir fait comprendre à tous que chaque propriété identifiée doit être justifiée par une connaissance de cours (définition ou propriété) ou par un calcul.</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| **Phase 5**<br>Recherche<br>*En groupe, au moins en binôme* | • Laisser un temps de recherche un peu conséquent en circulant entre les groupes pour observer l'avancement des recherches et le degré de preuve qu'apportent les différents groupes.<br>• Veiller à ne pas se prononcer sur la validité des productions de chaque groupe, mais relancer la démarche de preuve quand elle semble insuffisante, en demandant : « En êtes-vous sûrs ? Pourquoi ? Comment le savez-vous ? » |
| **Phase 6**<br>2$^{de}$ mise en commun<br>*Classe entière* | Une seconde mise en commun peut intervenir au sujet de l'alignement des points K, R et S. C'est aussi le moment de faire confronter les natures obtenues dans les différents groupes pour faire émerger le fait qu'on attend une réponse « double » (rectangle et isocèle). Le professeur incite ceux qui n'ont trouvé qu'une partie de la réponse à trouver des arguments pour le second volet (côtés/angles égaux ou angle droit). |
| **Phase 7**<br>Fin de la recherche<br>*En groupe, au moins en binôme* | Laisser le temps nécessaire aux groupes pour ordonner et exprimer leurs arguments. On insiste sur le fait qu'on dissocie l'exigence de trouver la solution du problème en apportant des arguments convaincants, de celle de communiquer cette résolution en rédigeant une démonstration. Cela peut être proposé aux élèves les plus à l'aise pour les faire progresser, mais l'important est ici de faire comprendre à la classe que la nécessité de trouver des éléments convaincants prime sur la mise en forme de ceux-ci. |
| **Phase 8**<br>3$^{ème}$ mise en commun<br>*Classe entière* | Une dernière mise en commun doit permettre de confronter les démarches, discuter de la présentation de certains calculs de mesures d'angle ou de la formulation des propriétés utilisées. On cherche à confronter les propriétés géométriques mobilisées, dans l'idée d'essayer aussi d'évaluer la longueur, la validité, le coût des différentes démarches qui ont émergé. L'objectif de cette phase est aussi de montrer que plusieurs raisonnements sont possibles et d'aider à discerner ceux qu'on peut privilégier (en fonction de ses connaissances, ses habiletés, etc.). |

## Verbalisation

- Après le moment de recherche individuel, lors des phases de travail par deux ou plus, il est demandé aux élèves de verbaliser précisément les propriétés géométriques mobilisées au sein du groupe, puis face à la classe.
- Les élèves verbalisent la justification des différents calculs d'angles, soit en citant la propriété de la somme des angles du triangle, soit en précisant la raison pour laquelle on peut ajouter ou soustraire des mesures (angles adjacents, complémentaires…).
- Le professeur incite les élèves à formuler et reformuler leurs réponses, à se corriger entre eux s'il y a des formulations maladroites ou inadaptées afin qu'ils emploient le lexique approprié : celui des angles (angles droits, angle plat), celui des triangles (côtés, angles, sommet principal, angles à la base), celui des quadrilatères.

## Trace écrite

La trace écrite pourra être composée de la diversité des procédures valides qui ont émergé lors de la mise en commun finale. Les différentes étapes sont à séparer les unes des autres, en montrant pour lesquelles l'ordre peut être inversé.

L'attention des élèves est portée sur la présentation en ligne des calculs d'angles, le rôle du signe égal dans une suite de calculs pour en éviter un usage abusif et penser à mobiliser l'usage des parenthèses pour écrire en une seule ligne un calcul à deux étapes. Une remarque est faite sur l'intérêt de faire figurer les unités dans les calculs de grandeurs, car celles-ci ont un rôle de contrôle qui peut être crucial pour qualifier un résultat.

# Pistes de différenciation

## Aux élèves qui rencontrent des difficultés au fil de la résolution

- Pour accompagner les élèves qui ont des difficultés à repérer la nature des figures qui ne sont pas en position inhabituelle triangle isocèle non posé sur sa base), il leur est proposé de changer l'orientation de la feuille et de leur faire verbaliser ce qu'ils voient dans des positions différentes.
- Pour certains élèves, les plus en difficulté, le recours à des tracés est envisagé, pour les aider à produire l'analyse géométrique de la figure à main levée. Par exemple, pour aider ceux qui bloquent sur la nature du quadrilatère KRUT, on peut les inciter à tracer un quadrilatère qui vérifie le codage de la figure.
- Pour les élèves qui ne savent pas formuler les propriétés géométriques nécessaires à l'argumentation attendue, on peut prévoir des fiches type « mémo » sur lesquelles figurent des listes de propriétés (celles des parallélogrammes particuliers, celles des triangles particuliers), pour qu'ils comprennent le registre de preuve attendu et qu'ils réfléchissent à choisir celles qui sont en rapport avec la tâche.

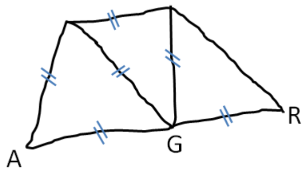
## Aux élèves les plus avancés en mathématiques

- La première piste de différenciation à proposer aux élèves les plus rapides est de leur faire travailler la compétence « communiquer » à travers la mise en forme de leur raisonnement qui n'est pas l'objectif pour l'ensemble des élèves, mais demeure une compétence à travailler et développer en vue du lycée.
- Lorsque le précédent objectif est atteint, on peut ajouter des questions à partir de la figure initiale, en demandant des natures de quadrilatères (RSUT et KSUT) avec toujours l'exigence de preuve déductive. Il peut leur être demandé le rapport entre les aires de certains triangles (KUS et KTU) ou encore le rapport entre l'aire du quadrilatère KRUT et celle du triangle KUS.
- Une autre piste à partir de la figure initiale est de demander de placer le symétrique P du point U par rapport à R, puis de déterminer la nature du quadrilatère KUSP en élaborant là encore une preuve déductive à partir de propriétés géométriques. En dernier recours, il est aussi possible, dans le même ordre d'idée, de demander de construire la figure avec les instruments pour placer ensuite le point P tel que le carré KUSP ait une aire égale au double de celle de KRUT, en le justifiant ensuite.

## Activités/Exercices de prolongement

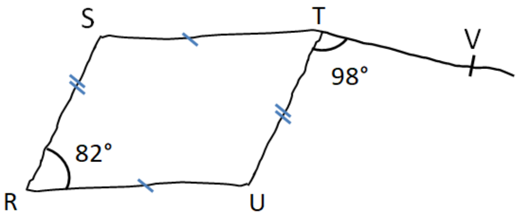
On peut proposer des séances de questions flash ou d'exercices rapides permettant de travailler sur le même registre : à partir de figures codées, déduire des faits géométriques.

Par exemple :

| | | Réponse A | Réponse B | Réponse C | Réponse D |
|---|---|---|---|---|---|
|  | D'après ce qui est codé, ce triangle est un triangle… | rectangle | isocèle | équilatéral | quelconque |
|  | D'après ce qui est codé, ce triangle est un triangle… | rectangle | isocèle | équilatéral | quelconque |
| D'après ce qui est codé,  | | les points A, G et R sont alignés | G est le milieu de [AR] | on ne peut pas savoir si les points A, G et R sont alignés | G est situé à égale distance de A et de R |

Le même type d'exercices peut être l'occasion de remobiliser les propriétés du parallélogramme, à travers une question comme celle-ci :

Sur la figure ci-dessous, réalisée à main levée, le quadrilatère RSTU est un parallélogramme.




Les points V, T et S sont-ils alignés ? Justifier.