BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**.

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Probabilités.

Dans une station de ski, il existe deux types de forfait selon l'âge du skieur :
- un forfait JUNIOR pour les personnes de moins de vingt-cinq ans ;
- un forfait SÉNIOR pour les autres.

Par ailleurs, un usager peut choisir, en plus du forfait correspondant à son âge, l'option *coupe-file* qui permet d'écourter le temps d'attente aux remontées mécaniques.

On admet que :
- 20% des skieurs ont un forfait JUNIOR ;
- $80\ \%$ des skieurs ont un forfait SÉNIOR ;
- parmi les skieurs ayant un forfait JUNIOR, 6% choisissent l'option coupe-file ;
- parmi les skieurs ayant un forfait SÉNIOR, $12{,}5\%$ choisissent l'option coupe-file.

On interroge un skieur au hasard et on considère les événements :
- J : « le skieur a un forfait JUNIOR » ;
- C : « le skieur choisit l'option coupe-file ».

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité $P(J \cap C)$.
3. Démontrer que la probabilité que le skieur choisisse l'option coupe-file est égale à $0{,}112$.
4. Le skieur a choisi l'option coupe-file. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un skieur ayant un forfait SÉNIOR ? Arrondir le résultat à 10^{-3}.
5. Est-il vrai que les personnes de moins de vingt-cinq ans représentent moins de 15% des skieurs ayant choisi l'option coupe-file ? Expliquer.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un skieur choisisse l'option coupe-file est égale à $0,112$.

On considère un échantillon de 30 skieurs choisis au hasard.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre des skieurs de l'échantillon ayant choisi l'option coupe-file.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   Donner les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité qu'au moins un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file.
   Arrondir le résultat à 10^{-3}.

3. Calculer la probabilité qu'au plus un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file.
   Arrondir le résultat à 10^{-3}.

4. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

EXERCICE 2 (7 points)

Principaux domaines abordés : Suites ; Fonctions, Fonction logarithme.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Un récipient contenant initialement 1 litre d'eau est laissé au soleil.
Toutes les heures, le volume d'eau diminue de 15%.
Au bout de quel nombre entier d'heures le volume d'eau devient-il inférieur à un quart de litre ?

a. 2 heures **b.** 8 heures **c.** 9 heures **d.** 13 heures

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ et $u_0 = 6$. On peut affirmer que :

a. la suite (u_n) est strictement croissante.

b. la suite (u_n) est strictement décroissante.

c. la suite (u_n) n'est pas monotone.

d. la suite (u_n) est constante.

3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 4\ln(3x)$.
Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a :

a. $f(2x) = f(x) + \ln(24)$

b. $f(2x) = f(x) + \ln(16)$

c. $f(2x) = \ln(2) + f(x)$

d. $f(2x) = 2f(x)$

4. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1} \ .$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.
La courbe $\mathcal{C}_g$ admet :

a. une asymptote verticale et une asymptote horizontale.

b. une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

c. aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale.

d. aucune asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 2]$ par :

$$h(x) = x^2(1 + 2\ln(x)) \quad .$$

On note $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de h dans un repère du plan.
On admet que h est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;2]$.
On note h' sa dérivée et h'' sa dérivée seconde.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;2]$, on a :

$$h'(x) = 4x(1 + \ln(x)) \quad .$$

5. Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;2\right]$, la fonction h s'annule :

a. exactement 0 fois. **b.** exactement 1 fois.

c. exactement 2 fois. **d.** exactement 3 fois.

6. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse $\sqrt{\mathrm{e}}$ est :

a. $y = \left(6\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x$ **b.** $y = \left(6\sqrt{\mathrm{e}}\right) \cdot x + 2\mathrm{e}$

c. $y = 6\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ **d.** $y = \left(6\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x - 4\mathrm{e}$

7. Sur l'intervalle $]0\,;2]$, le nombre de points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_h$ est égal à :

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** 3

EXERCICE 3 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Suites ;
Fonctions, Fonction exponentielle.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 1 + x - \mathrm{e}^{0,5x-2} \ .$$

On admet que la fonction f est dérivable sur **R**. On note f' sa dérivée.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0,5x\left(2 - \dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}}{0,5x} \times \mathrm{e}^{-2}\right)$.

En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a.** Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.

b. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est l'intervalle $]4 + 2\ln(2)\,; +\infty[$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction f sur **R**. On fera figurer la valeur exacte de l'image de $4 + 2\ln(2)$ par f.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1; 0]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie à la **partie A**.

1. **a**. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 4 \ .$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge. On notera ℓ la limite.

2. **a**. On rappelle que ℓ vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.

Démontrer que $\ell = 4$.

b. On considère la fonction `valeur` écrite ci-contre dans le langage Python :

```
def valeur(a):
    u=0
    n=0
    while u<=a:
        u=1+u-exp(0.5*u-2)
        n=n+1
    return n
```

L'instruction `valeur(3.99)` renvoie la valeur 12.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Géométrie dans l'espace.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère les points $A(5\,;0\,;-1)$, $B(1\,;4\,;-1)$, $C(1\,;0\,;3)$, $D(5\,;4\,;3)$ et $E(10\,;9\,;8)$.

1. **a**. Soit R le milieu du segment $[AB]$.
Calculer les coordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal.
Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ est :

$$x - y - 1 = 0 \ .$$

c. Démontrer que le point E appartient au plan $\mathcal{P}_1$ et que $EA = EB$.

2. On considère le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$.

a. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

b. On note Δ la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

3. On considère le plan $\mathcal{P}_3$ d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$.
Justifier que la droite Δ est sécante au plan $\mathcal{P}_3$ en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que $MS = MT$ est un plan, appelé plan médiateur du segment $[ST]$.
On admet que les plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.

4. **a.** Justifier que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.