INTERPRÉTATION DU NOMBRE DÉRIVÉ

ÉTUDE DES COURBES DE CROISSANCE D'UN ENFANT

Prérequis : fonctions affines, coefficient directeur, lecture graphique

Références au programme : Phénomènes d'évolution : croissance instantanée.

Domaine : nombre dérivé, variations d'une fonction.

Compétences mathématiques

- **Chercher** : savoir extraire les informations et les données d'un graphique.
- **Modéliser** : utiliser un modèle pour faire des prévisions, critiquer, modifier le modèle. Calculer : un coefficient directeur à partir d'une lecture graphique
- **Représenter** : une droite sécante, une droite tangente;
- **Communiquer** : exprimer à l'écrit ou à l'oral le protocole d'une démarche, interpréter un résultat dans un contexte autre que mathématique et faire le lien entre des registres linguistiques.

Histoire, enjeux, débats

Les mathématiques et la médecine

Les courbes illustrant l'évolution de certains paramètres de croissances apparaissent dans les carnets de santé, ce sont bien souvent les premières courbes complexes qu'un enfant rencontre. Leur lecture et interprétation ne sont pas toujours aisées : plusieurs échelles présentes sur les axes, grandeurs peu connues comme l'IMC, différentes courbes selon les écarts statistiques, etc. Elles sont pourtant des outils utiles pour la prévention dans le domaine de la santé, pour les parents et les professionnels. Le suivi de la croissance des enfants sert à étudier leur développement et à repérer d'éventuels troubles nutritionnels ou de santé afin d'agir avant que l'état de l'enfant soit gravement compromis. Ces courbes sont régulièrement mises à jour pour se baser sur des échantillons représentatifs de la population. Ainsi, malgré leur relative complexité, elles sont porteuses de signification et peuvent constituer un exemple de situation intéressante pour introduire la notion de nombre dérivé.

Les phénomènes d'évolution modélisés par ces courbes permettent un travail naturel sur la notion de vitesse moyenne de croissance et questionnent la notion de vitesse instantanée, que l'on peut définir comme cas limite. En effet, si les variations des grandeurs telles que la taille ou le poids sont clairement observables sur un intervalle de temps relativement long, des variations instantanées des mêmes grandeurs sont imperceptibles. Ainsi, ces situations, non seulement, développent le regard critique sur des phénomènes connus par tous les élèves, mais permettent une entrée concrète dans la notion de nombre dérivé qui passe par son interprétation dans des situations d'évolution.

Intentions pédagogiques

> **Référence au programme**
> On met en évidence par des zooms successifs qu'une courbe donnée a localement l'apparence d'une droite. Après cette sensibilisation, le nombre dérivé peut être présenté, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, comme étant le coefficient directeur de la tangente, position limite des sécantes passant par le point considéré.

Ce document propose deux activités, la partie 1 est une première rencontre avec le concept de nombre dérivé et la partie 2 est un prolongement pour observer le lien entre le signe du nombre dérivé sur un intervalle et le sens de variation de la fonction et introduire la fonction dérivée.

Dans la partie 1, conformément au programme, on commence par des zooms successifs sur une courbe et on cherche ensuite à expliquer mathématiquement l'observation faite en utilisant des sécantes. L'introduction des sécantes est motivée dans ce contexte par un questionnement sur la notion de vitesse de croissance, où la vitesse instantanée est vue comme un cas limite de vitesses moyennes. On retrouve là l'approche cinématique du concept de nombre dérivé. Enfin, un retour sur le zoom initial en y superposant la tangente permet de confirmer graphiquement la construction proposée.

La partie 2 propose encore une approche graphique, mais à partir de l'IMC. Cela permet d'étudier une fonction non monotone et de voir le lien entre le signe du nombre dérivé sur certains intervalles et le sens de variation de la fonction. En accord avec le programme, on ne questionne pas la dérivabilité des fonctions représentées par les courbes étudiées.

L'approche graphique sans formalisation algébrique doit permettre de reprendre et donner du sens à des notions vues en classe de seconde (variations d'une fonction, coefficient directeur, lecture graphique) dans un contexte qui contribue à la construction de l'identité du citoyen.

Scénario pédagogique

Modalités

Les activités proposées peuvent être menées en classe entière, de manière individuelle, en groupe ou binôme. Une version papier est possible, mais des appliquettes GeoGebra sont associées pour être exploitées en ligne. Ainsi la première rencontre avec l'activité peut déplacer hors la classe en utilisant les activités GeoGebra fournies dans le livret.

Déroulement

En amont de la séance, on peut prévoir la réactivation d'automatismes sur la notion d'intervalle et sur la lecture graphique du coefficient directeur d'une droite.

Après un temps de recherche en autonomie, il est conseillé de consacrer un temps à une phase de bilan et d'institutionnalisation. En effet, dans le cadre de la découverte de la nouvelle notion de nombre dérivé, la phase de retour collectif ou d'institutionnalisation est nécessaire pour :

- formaliser les points du programme travaillés en s'appuyant sur une trace écrite claire et accompagner ainsi l'activité d'abstraction ;
- expliciter les enjeux de la modélisation et les liens entre la situation étudiée et les mathématiques.

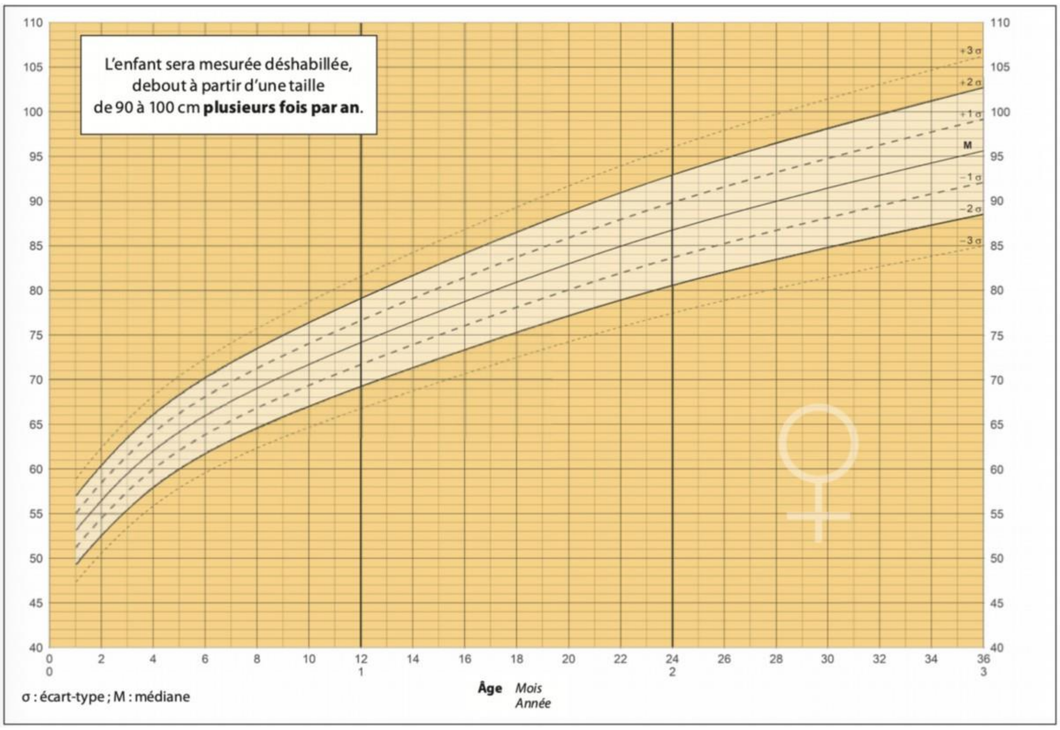
Les activités du livret (chapitre « Variation instantanée (nombre dérivé) ») peuvent être utilisées telles quelles, mais il est possible pour chaque enseignant de les copier sur son compte, de les modifier et d'en proposer une « Leçon » dans GeoGebra Classroom pour une supervision du travail de chaque élève sur l'interface. Les activités du chapitre offrent des appliquettes qui allègent la construction des droites, facilitent la lecture graphique et disposent des questions pour les élèves.

Pour aider à l'utilisation des activités en ligne, il existe :
- Livret GeoGebra Enseignement Spécifique de Mathématiques : https://www.geogebra.org/m/gjkggufr
- Chapitre Variation instantanée (nombre dérivé) : geogebra.org/m/gjkggufr#chapter/807737
- Tutoriel GeoGebra Classroom : geogebra.org/m/beamb9mh

Situation de l'activité

Partie 1 - Courbes de croissance de la taille des filles de 1 mois à 3 ans.

Le graphique suivant est issu d'un carnet de santé, il montre des courbes de croissance de la taille des filles de 1 mois à 3 ans. On considère la courbe centrale qui correspond à la croissance médiane[1].

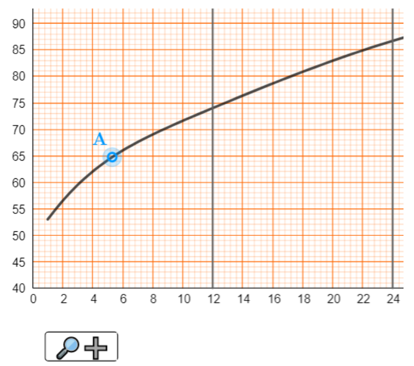


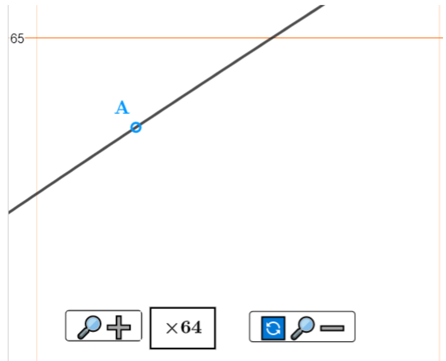
Source : https://solidarites-sante.gouv.fr/IMG/pdf/carnet_de_sante-num-.pdf

[1] *En chaque point, 50 % des filles ont une courbe de croissance qui se situe au-dessus et 50 % en dessous.*

Un premier travail de description de la courbe permet de focaliser l'attention sur les variations de la fonction représentée. L'aspect visiblement croissant de cette fonction, ce qui n'étonnera personne, peut être complété d'une réflexion sur la vitesse de croissance. On demande à quels âges la croissance est la plus rapide ou la plus lente.

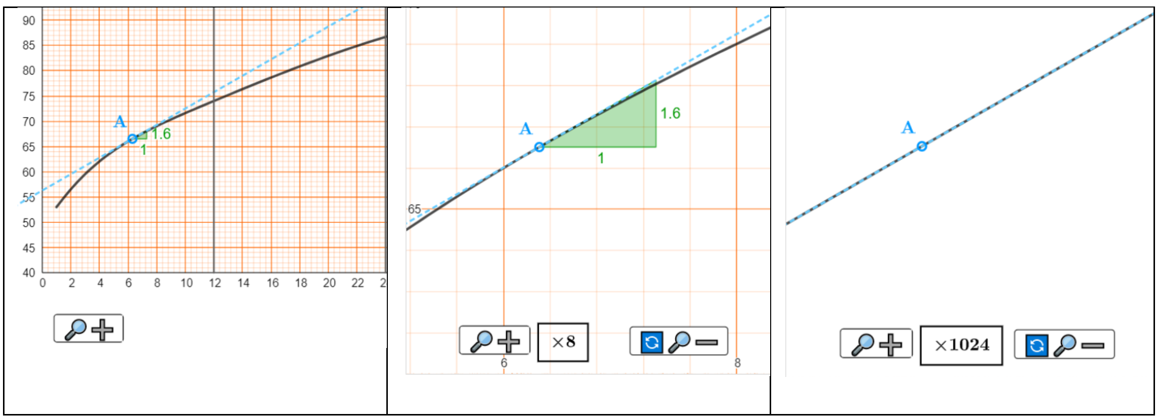
Pour ce faire, on étudie plus localement la courbe en choisissant un point A. Un zoom sur le point A permet de remarquer que l'allure de la courbe représentative ressemble de plus en plus à celle d'une droite quand on se restreint à des intervalles très petits autour du point A. Ceci est simplifié avec la première appliquette comportant un bouton zoom. Ainsi, l'idée d'approcher la courbe localement par une droite est abordée.





Puis, on rapproche le point M du point A, ce qui permet de lire des vitesses moyennes de croissance sur des intervalles de temps de plus en plus courts et d'amener à la position limite qui définit la tangente à la courbe au point A. La vitesse instantanée est le coefficient directeur de cette tangente. Une appliquette permet de choisir un point A, de tracer la droite sécante (AM), d'afficher une aide pour le calcul de sa pente ainsi que son équation réduite.

Enfin, une fois, cette présentation de la tangente interprétée comme position limite des sécantes, ainsi que l'interprétation de sa pente comme une vitesse instantanée, une dernière appliquette permet de confirmer cette construction en zoomant sur la courbe et sa tangente.



Ce travail sur les notions intuitives de vitesse est mis à profit lors de la phase d'institutionnalisation au cours de laquelle le vocabulaire spécifique aux fonctions est donné.

Exemples de questions

Les activités GeoGebra du livret comportent des exemples de questions possibles en appui des appliquettes proposées. Voici d'autres questionnements possibles pour une version papier afin de mener vers la notion de nombre dérivé d'une fonction et son lien avec les variations de la fonction.

Partie 1 - Courbe de croissance de la taille d'une fille de 1 mois à 3 ans.

1. Décrire la figure en précisant les intervalles sur lesquels la croissance paraît la plus rapide, puis la plus lente.
2. Tracer la droite passant par les points de la courbe correspondant à 1 mois et à 36 mois, calculer, en s'aidant du quadrillage, son coefficient directeur dans le cadre de la croissance considérée. On dit que ce nombre est la vitesse moyenne d'évolution de la taille d'une fille de 1 à 36 mois.
3. Calculer la vitesse moyenne d'évolution de la taille d'une fille de 1 à 24 mois, puis de 1 à 12 mois. Que remarquez-vous?
4. Tracer la droite passant par le point correspondant à la taille d'une fille au bout d'un mois et un deuxième point de la courbe le plus proche possible du premier.
5. Calculer son coefficient directeur dans le cadre de la croissance considérée.

On dit que ce nombre est la vitesse instantanée d'évolution de la taille d'une fille de 1 mois et que la droite « position limite » des sécantes est la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

6. Calculer la vitesse instantanée de croissance à 6 mois.
7. À quelle vitesse instantanée peut-on s'attendre à 25 ans ?
8. Quelles sont les périodes de la vie d'un nourrisson pour lesquelles la vitesse de croissance est la plus grande ? Quelle conséquence peut avoir cette information du point de vue du suivi médical des nourrissons ?

Bilan

Dans le cadre d'un modèle d'évolution :

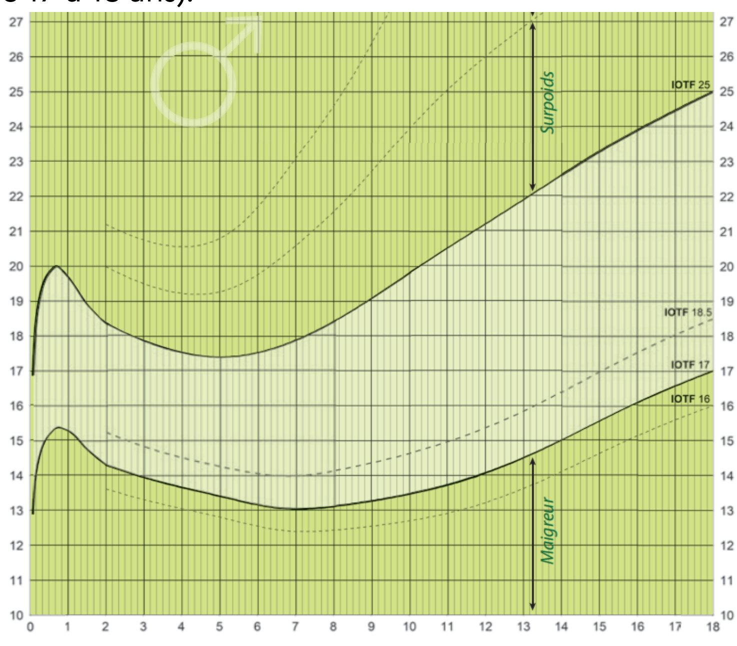
- Que représente le coefficient directeur de la droite tangente en un point à la courbe représentative du modèle ?

Dans le cadre d'une fonction :

- Le coefficient directeur de la droite tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction s'appelle *nombre dérivé de la fonction en l'abscisse de ce point.*
- Reformuler la réponse-bilan précédente dans le cadre d'une fonction en utilisant « nombre dérivé ».

Partie 2 - Évolution de l'indice de masse corporelle d'un garçon de 0 à 18 ans.

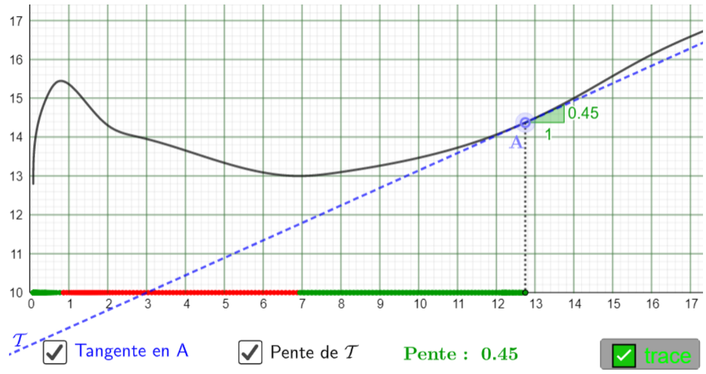
L'Indice de Masse Corporelle (IMC) d'un individu correspond au rapport entre son poids en kilogrammes et sa taille (en mètres) élevée au carré. La figure suivante montre les courbes représentant l'IMC d'un garçon en fonction du temps de 0 à 18 ans. On pourra considérer la courbe noire correspondant à IOTF17 (IMC de 17 à 18 ans).



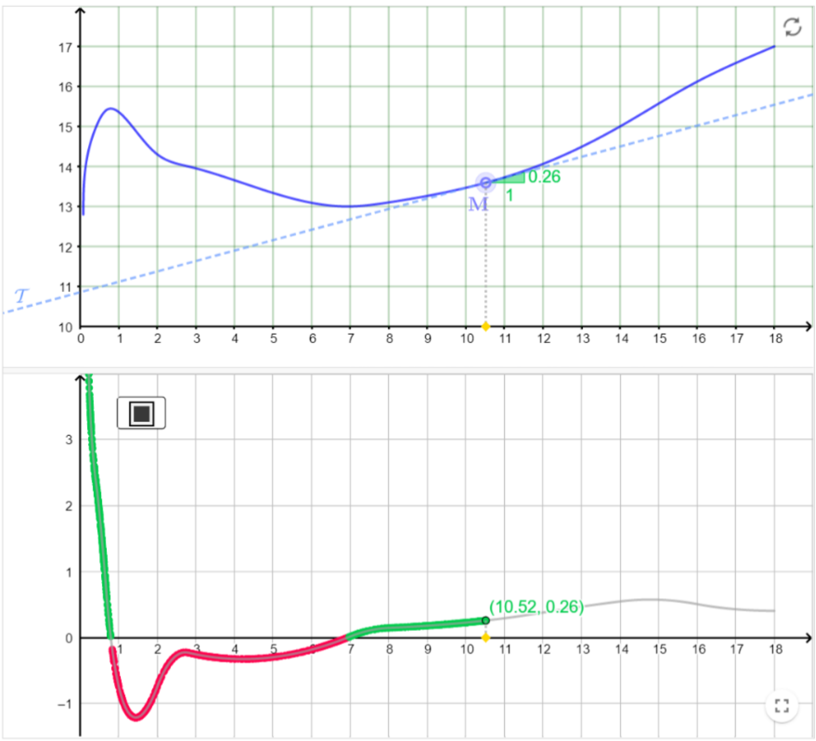
Dans cette deuxième partie, on demandera aux élèves de dresser le tableau de variations de la fonction représentée par la courbe considérée puis d'estimer des nombres dérivés suivant la méthode utilisée dans la première partie. En particulier, il sera intéressant d'amener les élèves à conjecturer le lien entre le signe du nombre dérivé et les variations de la fonction.

Cette situation permet d'aborder le cas d'un nombre dérivé négatif. Amener les élèves à une réflexion sur les points de la courbe où la droite tangente est horizontale et à la caractérisation des maximums et minimums complète l'exploitation de cette situation. L'apport de la modélisation mathématique peut jouer un rôle important pour permettre à l'élève de comprendre quels changements dans le corps de l'enfant correspondent aux variations ainsi étudiées. Cette réflexion peut être menée en début ou en fin de séance.

L'activité du livret propose diverses appliquettes et questions amenant à faire le lien entre le sens de variation sur un intervalle et le signe du coefficient directeur de la tangente. Un code couleur (vert/rouge) pour un coefficient directeur positif ou négatif peut aider certains élèves à visualiser le signe du nombre dérivé sur différents intervalles et permet de faciliter la construction du tableau des variations de la fonction.



La fonction dérivée peut alors être présentée, avec une construction point par point de sa courbe, comme la fonction qui à chaque abscisse x associe le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point M d'abscisse x.



Exemples de questions

- À partir de la courbe, dresser le tableau de variations de la fonction modélisant l'IMC d'un garçon de 0 à 18 ans.
- Déterminer graphiquement le nombre dérivé de la fonction modélisant l'IMC à 3 ans puis à 13 ans. Interpréter ces résultats dans le cadre de l'évolution considérée.
- Donner un intervalle sur lequel le nombre dérivé semble être positif en chaque point, puis un intervalle sur lequel il semble être négatif.
- Quel lien semble exister entre les variations de la fonction IMC et le signe du nombre dérivé ?
- En traçant plusieurs droites tangentes, déterminer à quel(s) moment(s) la vitesse instantanée d'évolution de l'IMC d'un garçon est nulle d'après ce modèle.

Bilan

Dans le cadre d'un modèle d'évolution :

- Que représente le coefficient directeur de la droite tangente en un point à la courbe représentative du modèle ?

Dans le cadre d'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

- On définit une fonction appelée *fonction dérivée* de f sur l'intervalle I qui à tout nombre x appartenant à I associe le nombre dérivé $f'(x)$. Ainsi :
$$\begin{aligned} f' : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$
- Si f' est positive sur un intervalle J inclus dans I alors f est croissante sur J.
- Si f' est négative sur un intervalle K inclus dans I alors f est décroissante sur K.

Après ce bilan et l'institutionnalisation, des exercices avec des courbes de fonctions usuelles permettent de concrétiser la notion de nombre dérivé et de l'associer aux fonctions mathématiques. Des appliquettes sont proposées en ce sens dans le livret ainsi qu'un exerciseur pour développer les automatismes de lecture de coefficient directeur.

Commentaires sur l'activité

Analyse a priori

Les situations étudiées sont mobilisables par des fonctions suffisamment régulières. Cela permet de ne pas aborder la définition de fonction dérivable par l'existence de la limite finie du taux de variations en tout point de son ensemble de définition. La notion de limite est ici vue exclusivement graphiquement. Elle garde sa signification et sa légitimité. Le calcul de taux d'accroissement n'est pas proposé pour éviter d'alourdir de formalisme algébrique la situation étudiée. De fait, le travail sur les coefficients directeurs de plusieurs droites sécantes permet de pallier ce manque. Cela ne permet pas de voir la dépendance du taux avec l'écart h entre les abscisses des points A et M, néanmoins la méthode graphique proposée met en évidence que la vitesse moyenne dépend de l'intervalle de temps considéré pour la calculer. Il est utile de réactiver des automatismes, préalablement à ces séances, concernant la lecture de coefficients directeurs de droites.

Dans la deuxième partie de l'activité, qui a pour but de faire le lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction, le professeur peut suggérer l'existence de cette fonction dérivée avant de travailler sur les variations. On regarde en effet le signe des coefficients directeurs des tangentes pour des abscisses appartenant à certains intervalles. Cela permet d'éviter des maladresses comme « si le nombre dérivé en un point est positif alors la fonction est croissante en ce point ». Le passage de l'étude locale à l'étude globale nécessite la révision des notations des intervalles, ce qui peut aussi se faire en automatismes préalablement à la séance.

Enfin, si l'interprétation de la première partie en termes de modélisation est relativement intuitive, la compréhension de l'IMC peut nécessiter un temps d'approfondissement préliminaire. Cela se faire d'abord en travaillant sur sa formule puis sur la courbe.

Une fois l'institutionnalisation effectuée, des entraînements de lecture graphique de nombres dérivés sont proposés. Un exerciseur randomisé (qui génère ses exercices aléatoirement) avec trois niveaux de difficulté est proposé à cette fin dans le livret, mais il en existe d'autres, par exemple sur WIMS.

Manipuler

L'exploitation du graphique par lecture de valeurs approchées, éventuellement à l'aide d'un instrument de mesure, permet à l'élève de remobiliser ses connaissances pour extraire des informations d'une courbe. Le fait que les valeurs lues sur le graphique nécessitent une approximation permet de rassurer l'élève par rapport à la recherche du seul bon résultat. C'est une posture qui peut surprendre et nécessiter un accompagnement afin d'être comprise et acceptée.

L'utilisation de l'appliquette GeoGebra permet une plus grande souplesse dans le choix des points de référence pour construire les sécantes. L'aspect dynamique permet de visualiser rapidement plusieurs valeurs de coefficients directeurs et ainsi d'accélérer le processus de découverte.

Verbaliser

La situation proposée se prête à un travail d'explicitation des apports des mathématiques à la compréhension du phénomène d'évolution. Cela est possible par le biais de questions utilisant de la compétence « communiquer » et s'appuyant sur la description de la représentation graphique et l'interprétation des valeurs de vitesses moyennes calculées ou encore en faisant des prévisions sur les variations des courbes considérées au-delà de l'intervalle proposé par le document. « Le nombre dérivé de f en a est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a » est une phrase complexe qui ne peut se retenir qu'une fois que l'on a compris le concept après suffisamment de manipulations.

Abstraire

Dans cette activité la phase d'abstraction est conséquente, car l'élève est amené à généraliser à toute fonction (dérivable) les intuitions obtenues dans une situation concrète. Entrer dans la notion de nombre dérivé par la vitesse de croissance permet de donner du sens au cadre institutionnel proposé par l'enseignant. Il peut faire référence à la situation de l'activité dès que la formalisation engendrera des difficultés de compréhension chez les élèves.

Pistes de différenciation possible

Les simplifications évoquées dans le paragraphe précédent peuvent être modulées en fonction des groupes d'élèves à qui s'adressent cette activité. Il semble judicieux de différencier le niveau de l'activité en termes de formalisation mathématique. Ainsi, on peut faire apparaître explicitement l'analogie entre taux de variation et coefficient directeur, puis entre position limite des sécantes et calcul de la limite du taux de variation.

Pistes d'évaluation

D'autres courbes présentes dans le carnet de santé peuvent être proposées en évaluation. Cela peut se faire également en travail personnel hors la classe ou par groupes avec une restitution écrite ou orale sous forme de bilan.

Ressources complémentaires

Bibliographie et sitographie

- Livret GeoGebra Enseignement Spécifique de Mathématiques : https://www.geogebra.org/m/gjkggufr
- Chapitre Variation instantanée (nombre dérivé) : geogebra.org/m/gjkggufr#chapter/807737
- Tutoriel GeoGebra Classroom : geogebra.org/m/beamb9mh
- Une autre approche similaire du nombre dérivé par la vitesse instantanée est proposée par l'IREM de Rennes : https://irem.univ-rennes1.fr/fonction-derivee