MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

VOIE GÉNÉRALE

2DE | 1RE | TLE

Mathématiques

ENSEIGNEMENT COMMUN

CROISSANCE EXPONENTIELLE

MODÉLISATION DE LA PROPAGATION D'UNE RUMEUR

Prérequis

Suite géométrique, fonction exponentielle $x \mapsto a^x$ ($a > 0$, $x \geqslant 0$), représentation graphique d'une fonction

Références au programme

« [...] modéliser des phénomènes en évolution : les suites, qui modélisent des grandeurs dont l'évolution est discrète, et des fonctions, qui modélisent des grandeurs dont l'évolution est continue. »

« La compréhension et l'interrogation critique des modèles étudiés permettent de développer des capacités de raisonnement et d'argumentation. Leur mise en pratique, tant dans des situations internes qu'externes aux mathématiques, permet de consolider des habiletés en matière de calcul, d'analyse et de production de graphiques ainsi que dans l'utilisation d'outils numériques. »

- Reconnaître un phénomène discret ou continu de croissance exponentielle et savoir le modéliser.
- Calculer un terme de rang donné d'une suite géométrique définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite géométrique ou d'une fonction exponentielle.
- Résoudre un problème de seuil dans le cas d'une croissance exponentielle par le calcul, à l'aide d'une représentation graphique ou en utilisant un outil numérique.

Domaine : Phénomènes d'évolution, croissance exponentielle

Compétences mathématiques
- **Chercher** : observer la propagation d'une rumeur et s'engager dans une démarche pour analyser ce phénomène.
- **Modéliser** : traduire en langage mathématique la propagation d'une rumeur à l'aide de suites géométriques, critiquer et invalider les modèles proposés.
- **Représenter** : passer du cadre numérique aux représentations graphiques des suites considérées.
- **Calculer** : déterminer les premiers termes d'une suite géométrique, effectuer des sommes de termes d'une suite géométrique à l'aide d'un tableur ou du logiciel Python, déterminer un seuil à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme.
- **Raisonner** : effectuer des inférences déductives pour invalider un modèle.
- **Communiquer** : décrire oralement des observations et débattre au sein d'un groupe de travail pour critiquer et faire évoluer le modèle, opérer la conversion entre le langage naturel et la notation sous forme de suite.

Histoire, enjeux, débats

Depuis la Seconde Guerre mondiale, la prolifération de rumeurs a engendré des effets désastreux et les chercheurs se sont alors intéressés à leur propagation. Aujourd'hui, avec les multiples sources d'information et l'utilisation généralisée des réseaux sociaux, les vitesses de propagation de ces rumeurs ont considérablement augmenté. La maîtrise du savoir étant un enjeu essentiel pour les sociétés, il est important d'être capable de modéliser cette propagation pour en comprendre le fonctionnement afin de distinguer une information fondée d'une information fausse.

https://france3-regions.francetvinfo.fr/grand-est/bas-rhin/strasbourg-0/rumeurs-fake-news-voila-comment-mieux-comprendre-ces-phenomenes-ne-pas-se-faire-pieger-1813590.html

Les mathématiques et l'esprit critique

Modéliser un tel phénomène en tenant compte de l'ensemble des paramètres s'avère complexe. Ainsi, en adoptant un modèle simplifié, on vise à rendre accessible l'étude des propagations de rumeurs. Cependant, il s'agit pour l'élève de prendre conscience des limites du modèle choisi et d'entrevoir des pistes d'amélioration pour le rendre plus fidèle à la réalité.

Intention pédagogique

Ce scénario s'inscrit dans le cadre des phénomènes d'évolution et s'appuie sur le triptyque *manipuler-verbaliser-abstraire*.

L'utilisation de suites géométriques permet une modélisation d'évolution discrète de la propagation d'une rumeur en cascade verticale, puis on passe à un modèle continu grâce aux fonctions exponentielles. Dans le cadre d'un travail différencié, l'activité vise à discuter et à faire évoluer le modèle choisi. Selon chacun des modèles envisagés, il s'agit d'estimer :

- le nombre d'individus au courant de la rumeur après un temps donné ;
- le temps nécessaire pour qu'un nombre donné de personnes soit au courant de la rumeur.

Des savoir-faire sur les suites géométriques et les fonctions exponentielles sont donc mobilisés et le travail peut être prolongé par l'étude d'un article de presse scientifique ou par des simulations sur Python.

L'appropriation des modèles étudiés, leur comparaison et l'interrogation critique sur leur validité développent des capacités de raisonnement et d'argumentation.

Scénario pédagogique/Modalités

Durée prévue : 1 h 30 à 3 h.

Étape 1 : Faire vivre la propagation d'une rumeur

Le professeur chuchote une rumeur à un élève (ou lui écrit sur un papier), puis cet élève la diffuse à ses voisins proches (2, 3 ou 4 maximum) et ainsi de suite. Les élèves observent la propagation de la rumeur, en particulier en comptant le nombre d'étapes nécessaires pour que toute la classe ait reçu le message. L'objectif de ce travail est de faire émerger des questionnements concernant les possibilités et les paramètres de propagation. Ainsi, à l'issue de l'observation de la propagation de cette rumeur, les élèves peuvent par exemple se poser les questions suivantes.

- En combien d'étapes toute la classe est-elle au courant ? On peut faire des « pronostics » avant de mener l'expérience.
- À qui est transmise la rumeur ? Un individu peut-il être plus d'une fois destinataire de la rumeur ? Est-il toujours facile de propager la rumeur, c'est-à-dire de trouver quelqu'un qui n'est pas encore au courant ?
- À combien de personnes la rumeur est-elle transmise à chaque étape ?

- Combien d'individus sont à l'origine de la rumeur ?
- Quelle est l'influence du nombre d'initiateurs et de transmissions ?
- Est-on toujours « obligé » ou a-t-on toujours envie de propager la rumeur ? Est-elle fondée ou infondée (*fake news*) ?
- Le contenu d'une rumeur peut-il évoluer ?

Ces interrogations visent à faire percevoir qu'établir un modèle est complexe dans la mesure où les paramètres sont nombreux et variés.

Étape 2 : Utilisation d'un modèle simplifié

Exemple d'énoncé

Un camarade vous informe que le self est fermé aujourd'hui.

Relayez-vous l'information ? Si oui, par quel moyen de communication ?

On suppose que chaque élève prévient deux de ses camarades, qui à leur tour, préviennent deux autres camarades chacun non encore informés et que la rumeur se répand de cette manière dans tout le lycée : chaque nouvel informé transmet la rumeur, la minute suivante uniquement, à deux autres élèves pas encore au courant de la rumeur.

Selon ce modèle :

- Combien d'élèves sont au courant de la rumeur après 10 minutes ?
- En combien de temps tous les élèves du lycée auraient connaissance de cette rumeur ?

Ce modèle semble-t-il adapté à cette situation ?

Les calculs peuvent être effectués à la main ou à l'aide de la calculatrice.

Le tableur ou le logiciel Python peuvent également être utilisés pour effectuer les sommes indiquant le nombre d'individus au courant de la rumeur à chaque étape.

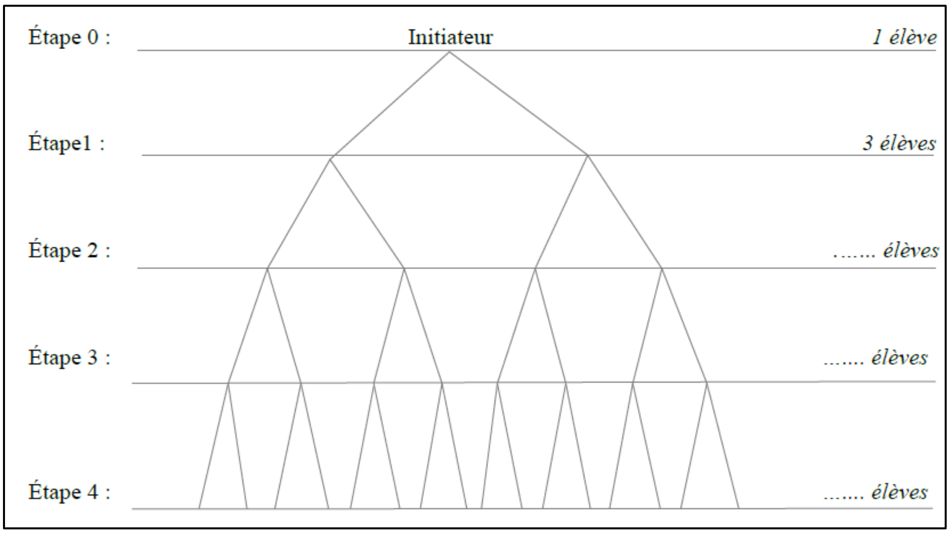
B3 =B2*2

	A	B	C
1	Etapes	Nouveaux élèves au courant	Total d'élèves au courant
2	0	1	1
3	1	2	3
4	2	4	7
5	3	8	15
6	4	16	31
7	5	32	63
8	6	64	127
9	7	128	255
10	8	256	511
11	9	512	1023

Il n'est pas attendu des élèves qu'ils utilisent une formule calculant la somme des termes d'une suite géométrique.

Dans le cadre d'un travail différencié, les aides suivantes peuvent être proposées aux élèves.

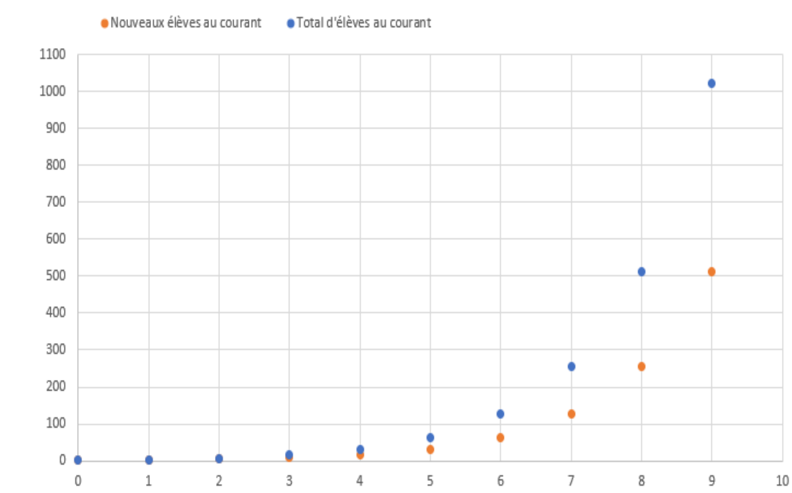
1. Faire exprimer que le nombre de nouveaux individus informés double à chaque étape.
2. Comment représenter cette évolution ? Construire par exemple un tableau ou un arbre représentant la situation sur quelques étapes.



3. La feuille de calcul ci-dessous peut être fournie avec ou sans les formules à saisir et à étirer.

B3 | f_x =B2*2

	A	B	C
1	Etapes	Nouveaux élèves au courant	Total d'élèves au courant
2	0	1	1
3	1	2	3
4	2	4	7
5	3	8	15
6	4	16	31
7	5	32	63
8	6	64	127
9	7	128	255
10	8	256	511
11	9	512	1023



4. Un programme Python, éventuellement à compléter, peut également être proposé.

```
def propagation(n):
    nouveaux = 1
    total = 1
    for k in range (n):
        nouveaux = nouveaux*2
        total = total + nouveaux
    return total
```

Console Python

```
>>> propagation(9)
1023
>>>
```

```
def seuil_propagation(effectif_lycee):
    minute = 0
    nouveaux = 1
    total = 1
    while total < effectif_lycee :
        minute = minute + 1
        nouveaux = nouveaux*2

        total = total + nouveaux
    return minute
```

Console Python

```
>>> seuil_propagation(1000)
9
>>>
```

Institutionnalisation

On établit que ce premier modèle est celui d'une somme de termes d'une suite géométrique de raison 2 et de terme initial 1. On discute de l'allure de sa représentation graphique en l'interprétant en termes de vitesse de propagation de la rumeur. La limite infinie de cette suite peut être évoquée oralement.

Prolongement possible

Le prolongement suivant peut être soumis à certains élèves.

> L'information se propage-t-elle plus rapidement :
>
> avec 10 initiateurs et par transmissions successives toutes les minutes à 2 individus
>
> ou
>
> avec un seul initiateur mais par transmissions successives toutes les minutes à 3 individus ?

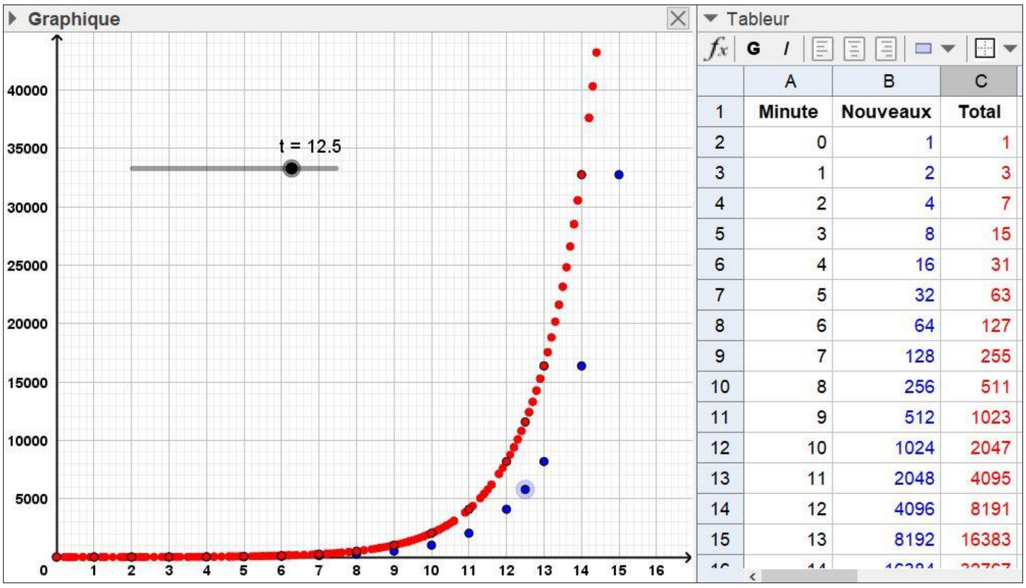
Étape 3 : D'un modèle discret à un modèle continu

L'énoncé de l'étape 2 est complété comme suit :

> Selon ce modèle, combien d'élèves sont au courant de la rumeur :
>
> - après 12 minutes et 30 secondes ?
> - après 10 minutes et 15 secondes ?

Ces questions ont pour objectif d'établir le passage d'un modèle discret à un modèle continu.

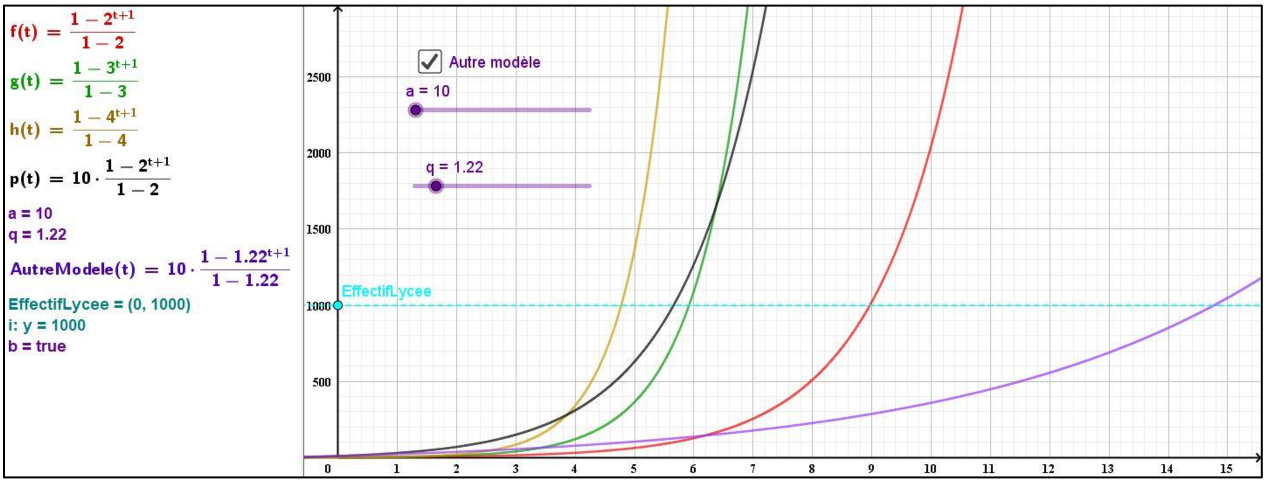
On établit le lien entre la suite géométrique u, définie pour tout entier naturel n, par $u(n) = 2^n$, et la fonction exponentielle f définie pour tout t réel positif par $f(t) = 2^t$. Puis, sans donner d'expression algébrique mais en utilisant l'outil « trace » de Geogebra, on fait le lien entre la somme des n premiers termes de la suite u et la fonction continue associée.



Voici quelques-unes des nombreuses limites de ce modèle :

- Le choix de la transmission systématique à 2 camarades était arbitraire : on pourrait choisir une transmission à 3 ou 4 camarades par exemple.
- En particulier s'il s'agit d'une vraie information, plusieurs élèves peuvent l'avoir reçue de source sûre et être initiateurs de la propagation. On lie cette remarque au terme initial de la suite utilisée comme modèle.
- Les exemples du prolongement de l'étape 2, pour lesquels on donne les définitions des suites correspondantes, peuvent permettre d'étayer le débat.
- Le temps mis pour relayer la rumeur peut être variable.
- Après un certain temps, le nombre de nouvelles personnes au courant de la rumeur dépasse le nombre total d'élèves du lycée.
- Des élèves peuvent ne pas transmettre la rumeur, par exemple s'ils l'estiment infondée.
- Cette contrainte est prise en compte au moment du bilan de cette étape 3, puis à travers les modélisations sur Python proposées à l'étape 4.
- La rumeur peut également être déformée.

On interprète les représentations graphiques suivantes en termes de vitesse de propagation.



En particulier, la comparaison proposée en prolongement de l'étape 2 est illustrée par la courbe tracée en vert et celle tracée en noir. Le nombre d'initiateurs correspond ici à l'ordonnée à l'origine de la fonction.

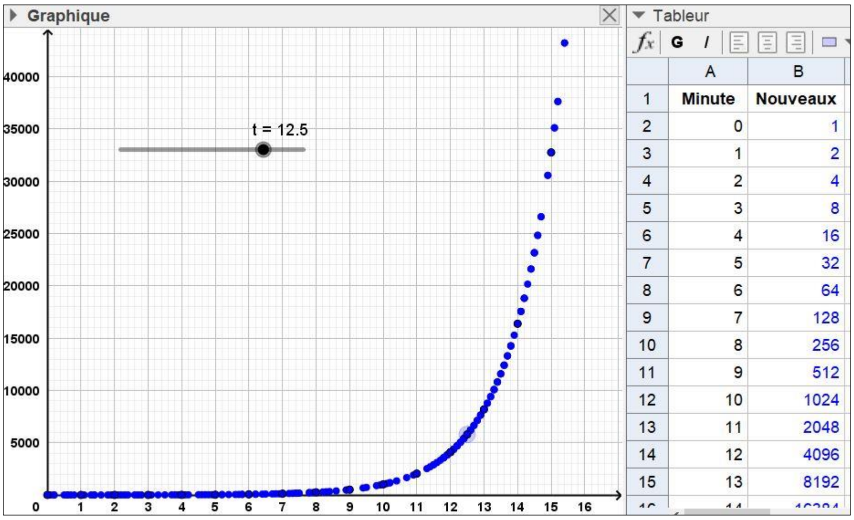
Cette animation Geogebra (Graphique_modèle_paramètres.ggb dans l'archive annexée) permet également aux élèves d'établir un autre modèle en faisant évoluer les paramètres a et q correspondant respectivement au nombre d'initiateurs de la rumeur et au nombre de transmissions de chaque nouvel informé.

Les choix de paramètres ci-dessus fournissent un modèle, représenté par la courbe violette, avec 10 initiateurs et un peu plus de 1 000 élèves informés après 15 minutes.

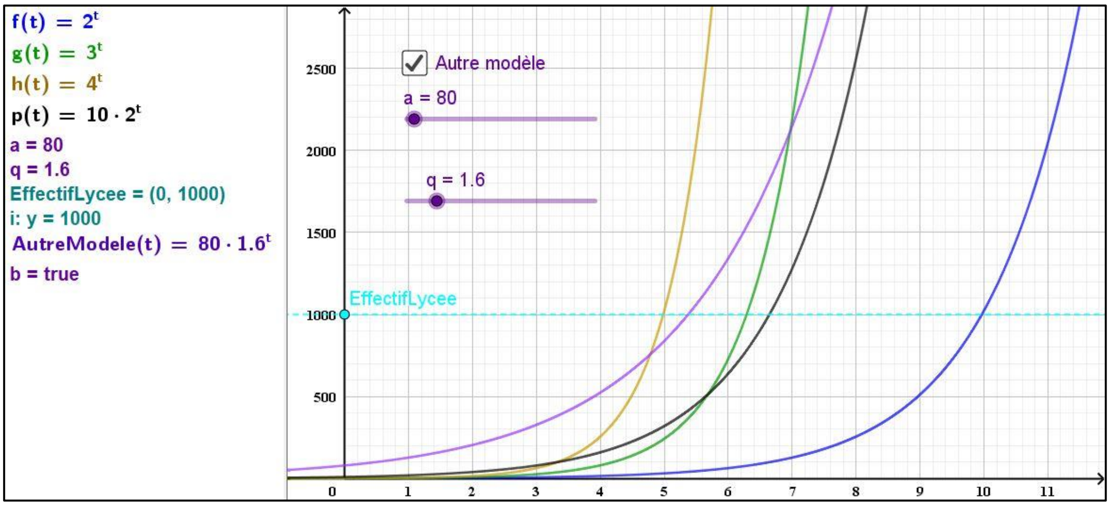
Variante envisageable : s'intéresser seulement à la dernière génération d'informés

En notant $S(n)$ le nombre total d'informés à la n-ième minute, on a, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité $2^n = S(n-1) + 1$. On constate donc que s'intéresser à la dernière génération d'informés, d'effectif 2^n, donne un bon ordre de grandeur de la propagation et suffit à l'étudier. On peut donc simplifier le travail décrit précédemment concernant le passage d'une évolution discrète à une évolution continue.

Comme précédemment, l'outil « trace » de Geogebra permet d'illustrer le passage de la suite géométrique à la fonction exponentielle.



Les allures des courbes sont similaires à celles correspondant à la totalité des informés de la rumeur et le travail critique mené par les élèves prenant appui sur l'animation Geogebra (« Graphique_sans_sommes_modèle_paramètres.ggb » dans l'archive annexée) est identique à celui présenté précédemment.

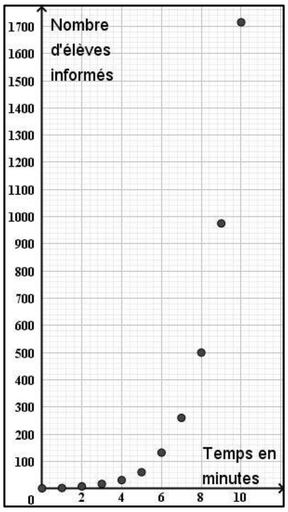


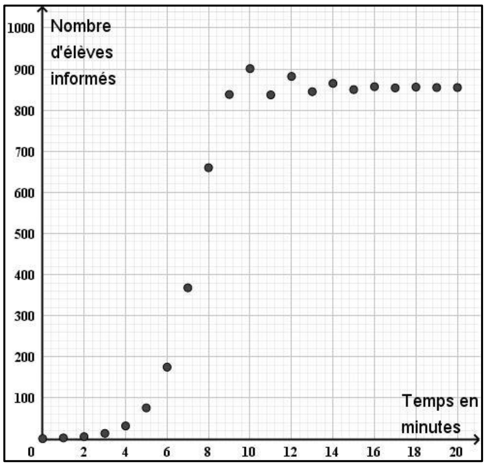
Les choix de paramètres ci-dessus fournissent un modèle, représenté par la courbe violette, avec 80 initiateurs et 1 000 élèves informés après environ 5 minutes et 20 secondes.

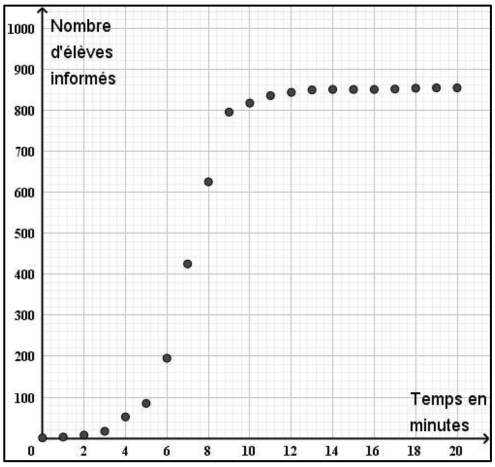
Bilan

Le modèle géométrique apparaît adapté sur les premières minutes de propagation, puis prend des valeurs trop élevées pour pouvoir être considéré comme cohérent. Ainsi, après avoir comparé et critiqué les modèles précédemment établis, les élèves peuvent être amenés à discuter de l'allure de la représentation graphique d'un modèle adapté. Sans en donner l'expression, ils peuvent tracer à main levée une courbe qu'ils estiment pouvoir représenter l'évolution du nombre d'élèves informés en fonction du temps.

On peut également demander aux élèves de choisir une représentation plausible, par exemple parmi les trois propositions ci-dessous.

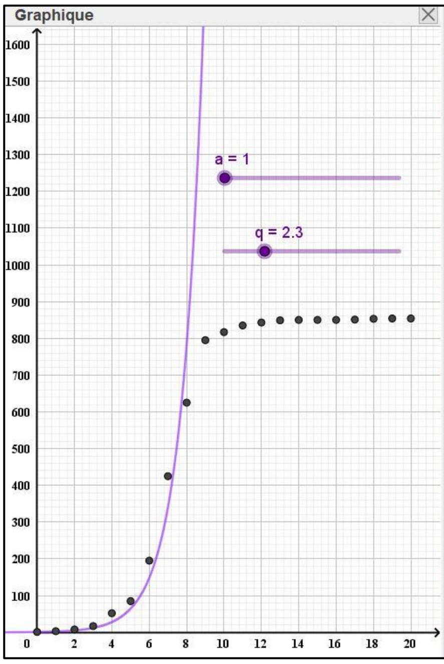






Le premier graphique semble représenter une évolution exponentielle pour laquelle le nombre d'élèves informés dépasse rapidement l'effectif d'un lycée. Les oscillations du second graphique sont incohérentes avec la croissance de la diffusion de la rumeur. Le troisième graphique paraît mieux représenter la propagation d'une rumeur dans un lycée.

Éventuellement en s'aidant d'une animation Geogebra (« Graphique_bilan_modèle_ paramètres.ggb » dans l'archive annexée), les élèves peuvent déterminer les paramètres d'un modèle exponentiel cohérent avec cette dernière évolution lors des premières minutes et estimer le temps après lequel il n'est plus adapté.



Tableur

	A	B	C
1	Minute	Nombre élèves informés	Modèle
2	0	1	1
3	1	3	2.3
4	2	8	5.29
5	3	17	12.17
6	4	52	27.98
7	5	85	64.36
8	6	195	148.04
9	7	425	340.48
10	8	625	783.11
11	9	795	1801.15
12	10	817	4142.65
13	11	835	9528.1
14	12	843	21914.62
15	13	849	50403.64
16	14	850	115928.36
17	15	850	266635.24
18	16	850	613261.04
19	17	851	1410500.4
20	18	853	3244150.91
21	19	854	7461547.09
22	20	854	17161558.31

Étape 4 : À la recherche d'un modèle plus adapté

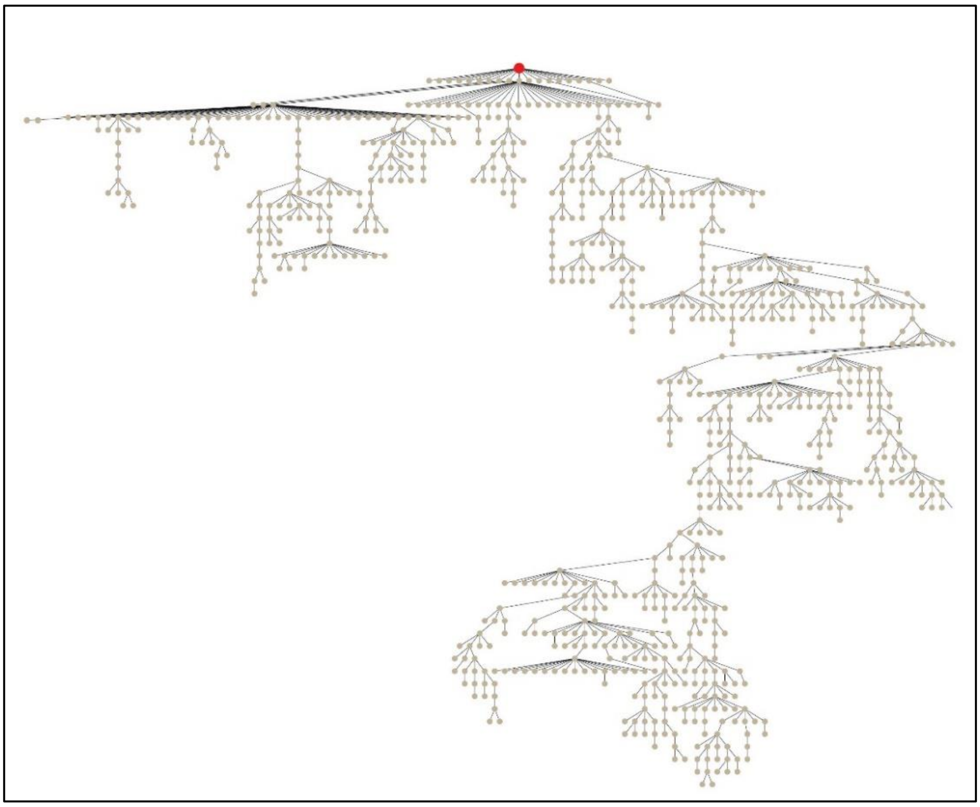
Cette étape vise à faire percevoir l'existence de modèles plus adaptés. On peut se contenter de mener un débat, éventuellement étayé par le visionnage d'une courte vidéo vulgarisant l'état actuel de la recherche scientifique concernant la propagation de rumeurs en cascade (verticale ou horizontale). https://www.youtube.com/watch?v=UGDLNPFaJVw.

Un travail d'analyse d'un article issu d'une revue scientifique peut également s'avérer opportun pour finaliser l'analyse critique menée au cours de ce scénario.

Pour cette étape, on se focalise sur les points de discussion suivants.

- Toutes les personnes ayant connaissance de l'information ne vont pas la diffuser à un même nombre de personnes.
- Des personnes peuvent décider de ne pas transmettre l'information.
- Selon que la rumeur est fondée ou non, elle ne se propagera pas de la même manière.

En particulier, le graphique en cascade verticale ci-dessous illustre une propagation de rumeur pour laquelle des branches s'arrêtent faute de transmission.



Source : https://twitter.com/EnDirectDuLabo/status/1103247068431298561/photo/1

Propositions de questions

- Les modèles établis aux étapes 2 et 3 sont-ils conformes aux différentes informations issues des documents consultés et en particulier au graphique ci-dessus ?
- Comment établir un modèle tenant compte de ces informations pour modéliser de manière plus satisfaisante la situation initiale concernant la rumeur se propageant dans le lycée ?

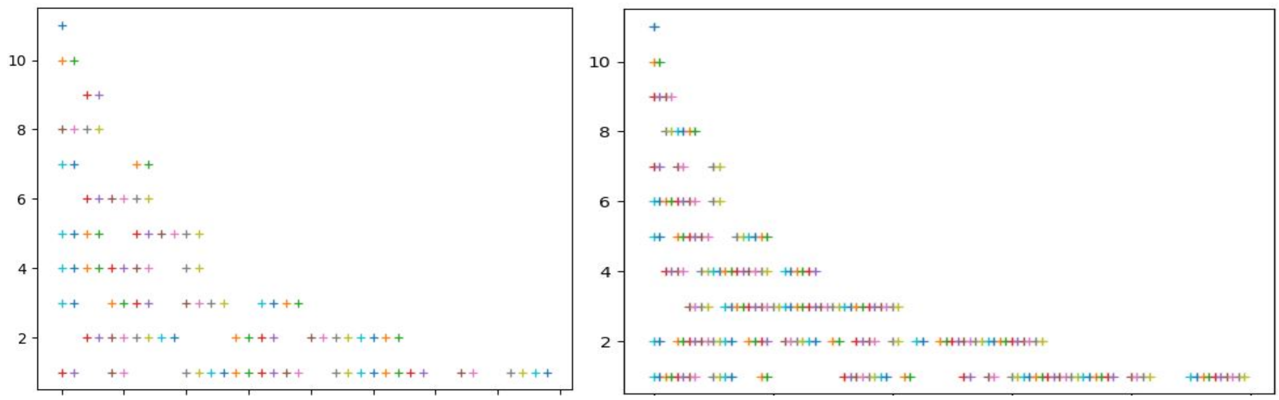
Pour un entier naturel n donné, le programme Python ci-dessous (« Rumeurs_modèle_aléatoire.py » dans l'archive annexée) modélise une propagation initiée par une seule personne et transmise à deux personnes avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. Cet outil de simulation n'est pas construit par les élèves, mais certains d'entre eux peuvent éventuellement le faire évoluer en modifiant le code. La représentation graphique peut être confrontée à la propagation en cascade représentée ci-dessus.

```
def propagation_trace(n):
    ligne=0
    L=[1]
    Total = 1
    M=[]
    plot(0,n-ligne+1,'+')
    while ligne < n:
        for k in range(len(L)):
            if randint(0,2) in [0,1]:          # Avec une probabilité de 2/3,
                M=M+[1,1]                      # un individu de la liste L
                plot(k,n-ligne,'+')            # diffuse la rumeur à 2 individus
                plot(k+0.5,n-ligne,'+')        # placé dans la liste M
        L=M                                    # (graphiquement en dessous)
        M=[]
        Total = Total + len(L)
        ligne=ligne+1
    show()
    return Total
```

Console Python

```
>>> propagation_trace(5)
23
>>> propagation_trace(5)
5
>>> propagation_trace(10)
101
>>> propagation_trace(10)
93
>>> propagation_trace(10)
209
>>> propagation_trace(10)
3
>>> propagation_trace(10)
317
>>>
>>>
```

Deux représentations graphiques obtenues pour deux simulations de propagation à 10 étapes :



On remarque une très grande fluctuation des résultats : certaines simulations de cascade s'arrêtent très rapidement alors que d'autres se propagent à un grand nombre d'individus.

Propositions de questions bilan

« La propagation à grande échelle est donc un phénomène extrêmement rare. Paradoxalement, elle est aussi très visible. En effet, les cascades importantes impliquent nécessairement un très grand nombre d'individus et ont donc de fortes chances de nous atteindre. Lada Adamic, spécialiste de la science des réseaux chez Facebook, estime ainsi que chaque image que nous voyons sur ce réseau social a une chance sur deux d'être le fruit d'une cascade de propagation impliquant plus de 500 personnes... alors qu'elles ne se produisent que 0,001 % du temps ! »

La Recherche, mensuel 546 avril 2019 - Mehdi Moussaïd, Institut Max-Plank pour le développement humain.

Les cascades verticales s'arrêtent donc souvent rapidement, mais impliquent parfois un grand nombre d'individus.

- Cet extrait d'article scientifique est-il cohérent avec les différents modèles envisagés ?
- Un modèle est-il unique ?
- Un modèle traduit-il complétement la réalité ?

Commentaires de l'activité

Analyse a priori

Laisser un temps de discussion au début de la séance permet aux élèves de partager leurs préjugés, puis de les confronter à différents modèles. L'invalidation des modèles étudiés peut s'avérer frustrante, mais il s'agit ici de développer un esprit critique et de faire percevoir la complexité du concept de modélisation.

Les différentes phases de réflexion, de mise en commun et d'institutionnalisation visent à travailler des notions du programme en tenant compte de la diversité des élèves, tout en maintenant un travail commun concernant la modélisation du phénomène de société que constitue la propagation des rumeurs.

Verbaliser

La place de l'oral dans cette activité est centrale. Ce scénario propose en effet des activités visant à faire émerger des résultats de natures variées, permettant des confrontations riches et un affinement progressif des choix de modélisation mathématique.

Manipuler

Faire vivre la propagation d'une rumeur, puis schématiser le problème initial visent à favoriser la compréhension du concept de modélisation par une suite et en percevoir les limites. La manipulation des animations Geogebra a pour objectif de donner du sens à la notion de suite géométrique, utilisée ici comme un modèle, et de favoriser la représentation du passage d'une évolution discrète à une évolution continue.

Abstraire

Mathématiquement, seules les notions de suite géométrique et de fonction exponentielle sont utilisées et institutionnalisées, mais la discussion du modèle est une attitude critique transférable à de nombreuses autres situations.

Autres pistes de différenciation possibles

1. L'**énoncé** de l'étape 2 peut être **modifié** de sorte que chaque individu au courant de la rumeur se propageant dans le lycée la transmette toutes les minutes à deux nouveaux élèves pas encore au courant. Le calcul du nombre total d'élèves informés à la n-ième minute est alors différent :

	A	B	C
1	Etapes	Nouveaux	Total
2	0	1	1
3	1	=2*C2	3
4	2	6	9
5	3	18	27
6	4	54	81
7	5	162	243

   Avec les notations précédentes, pour tout entier naturel n, on a $S(n+1) = S(n) + 2S(n) = 3S(n)$.

   Ainsi, la suite S est géométrique de raison 3 et une étude critique de ce modèle peut être menée de manière similaire à celle décrite aux étapes 2 et 3.

2. On propose ici un **approfondissement** du travail sur Python pour les élèves intéressés, suivant par exemple la spécialité NSI.

   Par des programmes utilisant le même « modèle aléatoire » que celui présenté à l'étape 4, on peut obtenir des indications concernant la propagation de la rumeur simulée. Par exemple, pour un entier naturel n donné et une répétition de 100 simulations de propagation à n étapes, on calcule ci-dessous :

– le pourcentage de cascades impliquant plus de 500 élèves (environ la moitié des élèves d'un lycée) ;
– le nombre moyen d'individus informés de la rumeur.

Ces résultats peuvent être confrontés aux modèles établis précédemment.

```python
def propagation_aleatoire(n):
    ligne=0
    L=[1]
    Total = 1
    M=[]
    while ligne < n:
        for k in range(len(L)):
            if randint (0,2) in [0,1]:
                M=M+[1,1]
        L=M
        M =[]
        Total = Total+ len(L)
        ligne=ligne+1
    return Total

def estimation_pourcentage(n):
    compteur = 0
    for simulation in range (100)
        if propagation_aleatoire(n) >= 500 :
            compteur = compteur + 1
    return compteur / 100

def moyenne_pourcentage(n):
    somme = 0
    for simulation in range (100):
        somme = somme + propagation_aleatoire(n)
    return somme / 100
```

Console Python

```
>>> estimation_pourcentage(10)
0.0
>>> estimation_pourcentage(20)
0.41
>>> estimation_pourcentage(20)
0.47
>>> estimation_pourcentage(30)
0.49
>>> estimation_pourcentage(10)
66.12
>>> estimation_pourcentage(10)
79.94
>>> estimation_pourcentage(20)
1568.18
>>> estimation_pourcentage(20)
1485.8
>>> estimation_pourcentage(30)
25351.8
>>>
```

Par ailleurs, dans le cadre d'un travail différencié, les élèves peuvent modifier le code pour tester et comparer différents modèles.

On peut par exemple faire évoluer :

- les probabilités et les nombres de transmission par individu au courant de la rumeur (on peut par exemple imaginer qu'un individu au courant de la rumeur la transmette de manière équiprobable à 0, 1, 2 ou 3 nouvelles personnes) ;
- le nombre d'initiateurs de la rumeur.

On peut également imaginer une transmission importante sur les premières minutes et plus limitée par la suite.

Bibliographie et sitographie

https://www.youtube.com/watch?v=UGDLNPFaJVw

https://www.larecherche.fr/sciences-cognitives-publications/comment-se-propagent-les-rumeurs