MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
*Liberté
Égalité
Fraternité*

VOIE GÉNÉRALE
ET TECHNOLOGIQUE

2DE | 1RE | TLE

Accompagnement personnalisé

Mathématiques

Résoudre des problèmes mobilisant les nombres entiers

Domaine : Nombres et calculs

Sous domaine : Utiliser les notions de multiple, diviseur et de nombre premier

Compétences mathématiques : Chercher, calculer, raisonner, communiquer

Objectifs

Résoudre des problèmes mobilisant les notions de multiple, diviseur, de nombre pair, de nombre impair, de nombre premier. Utiliser les critères de divisibilité, mobiliser différents types de raisonnement.

Modalités

- Durée de l'activité : 55 minutes
- Travail de groupe (2, 3 ou 4 élèves)

Énoncé de l'activité d'accompagnement personnalisé

Un ensemble de quatre exercices

Exercice 1 : Utilisation d'un critère de divisibilité

a. Par quel(s) chiffre(s) peut-on remplacer u pour que le nombre de trois chiffres qui s'écrit $43u$ avec u le chiffre des unités soit divisible par 3 ?

b. On donne le nombre de quatre chiffres qui s'écrit $3dd7$, où d est le chiffre des dizaines et des centaines. Déterminer d sachant que le nombre $3dd7$ est un multiple de 9.

Exercice 2 : Démonstrations d'arithmétique

Démontrer que si un nombre est divisible par 6 alors il est divisible par 3.

Démontrer que si un nombre n'est pas divisible par 4, alors il n'est pas divisible par 8.

Exercice 3 : Vrai/faux

Indiquer si chaque affirmation est vraie ou fausse. Justifier.

- Le produit de trois nombres pairs est un multiple de 8.
- La somme de deux nombres impairs est un nombre impair.
- La somme de trois nombres impairs est un nombre impair.
- Le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Exercice 4 :

Soit n un entier naturel.

Démontrer que si n est impair alors 8 divise $n^2 - 1$.

Commentaires de l'activité

Analyse de l'activité

Quelles procédures correctes les élèves peuvent-ils utiliser pour résoudre la tâche ?

<u>Exercice 1</u>

Procédures correctes

Cette activité mobilise des compétences relatives aux critères de divisibilité par 3 et par 9, et éventuellement (résolution 2) au calcul littéral.

Il existe deux stratégies majeures possibles pour les élèves :

- le test, en remplaçant u dans la question a. et d dans la question b. par les dix chiffres possibles pour ensuite vérifier si les nombres obtenus sont ou non divisibles par 3 ou par 9,
- le calcul littéral combiné au fait qu'un chiffre est compris entre 0 et 9 inclus. Ainsi, la première question peut être formulée de la manière suivante : « Déterminer les valeurs entières possibles de k telles que $u = 3k - 7$ appartient à $[\![0,9]\!]$ », tandis que la deuxième devient « Déterminer les valeurs entières possibles de k' telles que $d = (9k' - 10)/2$ appartient à $[\![0,9]\!]$ ».

Exercice 2

Procédures correctes

Cette activité mobilise des compétences relatives à la notion de divisibilité, et pour la deuxième question au raisonnement par contraposée.

Le raisonnement attendu repose sur deux notions :

- le fait que tout nombre entier divisible par 6 peut être écrit sous la forme $6k$ avec k entier (même démarche pour 8),
- la décomposition de $6k$ en $3 \times (2k)$ (et de $8k$ en $4 \times (2k)$).

Comme précisé, il est attendu pour la deuxième question que l'élève puisse reformuler la question en « Démontrer que si un nombre est divisible par 8 alors il est divisible par 4 » en raisonnant par contraposée.

Un raisonnement par disjonction de cas est aussi possible : N n'est pas divisible par 4 se traduit par il existe k entier tel que N s'écrit sous une des trois formes suivantes

- $4k + 1, 4k + 2$
- ou $4k + 3$.

Exercice 3

Procédures correctes

Cette activité mobilise des compétences relatives aux notions de parité d'un nombre et à la démonstration mathématique adaptée.

Le raisonnement attendu repose sur :

- la caractérisation algébrique d'un nombre pair, $2k$, et d'un nombre impair, $2k + 1$, où k est un entier,
- pour la première assertion, l'élève doit savoir que tout nombre entier multiple de 8 peut être écrit sous la forme $8k$ avec k entier,
- l'utilisation d'un contre-exemple pour démontrer la fausseté d'une assertion,
- l'utilisation du calcul algébrique pour démontrer la véracité d'une assertion.

Exercice 4

Procédures correctes

Cette activité mobilise des compétences relatives à la notion de nombre impair ainsi qu'à l'utilisation des identités remarquables.

Pour résoudre cette tâche, les élèves vont devoir dans un premier temps donner l'expression d'un nombre impair, calculer son carré puis la différence demandée.

Le raisonnement attendu repose sur deux notions :

- la divisibilité par 8,
- si deux nombres entiers sont consécutifs alors l'un d'entre eux est pair.

Quels erreurs et obstacles potentiels ? Quelles pistes de remédiation ?

Exercice 1

Type d'obstacles ou d'erreurs	Piste de remédiation
Confusion dans la lecture de l'énoncé entre $43u$ avec u chiffre des unités et $43 \times u$.	L'enseignant reformule la consigne, en donnant éventuellement un exemple.
Non ou faible connaissance des critères de divisibilité par 3 et par 9.	Rappel en amont de la séance de ces deux critères ou réactivation par des question flash (« les nombres suivants sont-ils ou non divisibles par 3 ? Par 9 ? : $312, 450, 739, 2736$ »).
L'élève s'oriente vers la résolution de $7 + u = 3k$ ou de $2d + 10 = 9k'$ mais peine à comprendre ce qu'il est ensuite attendu de lui.	Rappeler les règles de résolution des équations, et le fait que par définition u et d sont des chiffres, donc des entiers compris dans l'intervalle [|0 ; 9 |]. Proposer ainsi au groupe des tests possibles pour k et k' et leur indiquer la nécessité de rester dans l'intervalle attendu
Rédaction et justification incorrecte.	Rappeler aux élèves la nécessité de devoir verbaliser leurs procédures à l'intérieur du groupe.

Exercice 2

Type d'obstacles ou d'erreurs	Piste de remédiation
Utilisation de l'exemple pour démontrer.	Rappel en amont de l'inexistence de la démonstration par l'exemple, ou questions flash en arithmétique sur la place de l'exemple (et du contre-exemple, éventuellement en lien avec l'exercice 3 suivant).
Mauvaise compréhension de la différence entre implication et implication réciproque : l'élève confond « divisibilité par 6 implique divisibilité par 3 » et « divisibilité par 3 implique divisibilité par 6 ».	Suggérer à l'élève de tester sa formulation avec des multiples de 6 et de 3 afin de montrer laquelle des deux propositions est vraie donc démontrable. Veiller, dans le cas des multiples de 3, à bien préciser à l'élève de choisir des nombres pairs et impairs pour éviter qu'il n'en déduise à tort que la divisibilité par 3 implique la divisibilité par 6.
Difficulté à raisonner par contraposée.	Rappel en amont du principe de raisonnement par contraposée ou questions flash concernant plusieurs propriétés et l'explicitation de leur contraposée, en arithmétique ou dans d'autres domaines mathématiques.
Rédaction et justification incorrecte.	Rappeler aux élèves la nécessité de devoir verbaliser leurs procédures à l'intérieur du groupe.

Exercice 3

Type d'obstacles ou d'erreurs	Piste de remédiation
Explicitation algébrique des nombres pairs et impairs. Erreur fréquente : écrire $n + 1$ pour un nombre impair.	L'enseignant fait émerger l'écriture algébrique d'un pair et d'un impair au début de la séance pour éviter un blocage immédiat.
Pour les assertions 1, 3 et 4, l'élève fournit un ou plusieurs exemples qui fonctionnent et conclut directement à la véracité de l'assertion.	L'enseignant fait émerger une réflexion personnelle de l'élève sur sa démarche en proposant une assertion-piège qui semble fonctionner sur quelques essais mais qui s'avère généralement fausse.
Pour l'assertion 4, l'élève traduit le produit de deux entiers consécutifs par $n(n + 1)$, où n est un entier, et ne parvient pas à raisonner sur cette écriture.	En écrivant quelques produits numériques au tableau, faire réaliser à l'élève que les entiers consécutifs sont toujours une alternance de pairs et d'impairs (prolongement possible à l'écriture de pairs consécutifs et/ou d'impairs consécutifs).
L'élève produit des calculs algébriques « à la chaîne » sans avoir en tête le format final $2k$ ou $2k + 1$, k entier, et ne parvient pas achever sa démonstration.	Proposer quelques expressions algébriques à manipuler par développement/factorisation en proposant un résultat sous la forme $2k$ ou $2k + 1$, k entier.
Rédaction et justification incorrecte.	Rappeler aux élèves la nécessité de devoir verbaliser leurs procédures à l'intérieur du groupe.

Exercice 4

Type d'obstacles ou d'erreurs	Piste de remédiation
Formalisation de l'écriture d'un nombre impair. Certains élèves vont construire un nombre impair à partir d'un entier naturel n auquel ils ajoutent 1.	Demander à l'élève de tester leur formulation pour $n = 2, n = 3$ etc....
Développement de $(2k + 1)^2$ avec k entier naturel.	Suggérer à l'élève de tester leur égalité pour $k = 3$ leur proposer de retrouver la formulation de l'égalité $(a + b)^2$ à l'aide du double développement $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ avec a et b deux nombres réels
Compréhension de la notion de divisibilité par 8.	Proposer à l'élève de fournir une liste de trois nombres divisibles par 8 et de faire une analogie avec la forme réduite de l'expression $n^2 - 1$.
Difficulté à identifier le critère de divisibilité par 2.	Demander à l'élève de factoriser l'expression puis de réfléchir à la notion de parité pour deux nombres entiers consécutifs.
Rédaction et justification incorrectes.	Rappeler aux élèves la nécessité de devoir verbaliser leurs procédures au sein du groupe.

Déroulé

Les élèves vont d'abord prendre connaissance individuellement des problèmes proposés et essayer de les résoudre.

Puis en groupe, ils vont effectuer la mise en commun de leurs recherches, le choix des procédures correctes ainsi que la rédaction de la trace écrite.

Une mise en commun est effectuée :

- soit en classe entière au tableau en attribuant à chaque groupe la présentation de la résolution d'un exercice,
- soit par îlot en s'inspirant du fonctionnement de la classe puzzle (ou Jigsaw) :

Le professeur dispose d'un jeu de vignettes : chacune comporte un polygone et est déclinée en différentes couleurs.

1/ Dans un premier temps, les élèves sont regroupés par îlot. Chaque îlot travaille sur les quatre exercices. Les élèves d'un même îlot reçoivent une vignette avec le même polygone décliné dans différentes couleurs. Le professeur circule pour vérifier la compréhension des consignes par tous les membres de l'îlot et pour accompagner la résolution des exercices et, au besoin, rectifier certains raisonnements.

2/ À la fin du temps dédié à cette première phase, le sens des vignettes est expliqué : chaque polygone correspond à un exercice ou une fraction d'exercice (triangle : exercice 1, quadrilatère : exercice 2, etc.). Tous les groupes doivent alors se séparer, et reconstituer cette fois des îlots par couleur. Il y a donc un îlot avec les élèves porteurs des vignettes rouges, un autre avec des élèves ayant des vignettes jaunes, etc.

3/ Lors de cette deuxième phase, les élèves ont à résumer les exercices et les techniques de résolution mis en place pour ceux-ci, en s'appuyant sur la présentation qu'en fait l'élève porteur de la vignette comportant le polygone correspondant.

Verbalisation

- Encourager les élèves à verbaliser leurs procédures à l'intérieur du groupe puis lors de la restitution.
- Inciter les élèves à formuler et reformuler leurs réponses de manière à ce qu'ils emploient le lexique adéquat.

Traces écrites

La trace écrite pourra être composée des diverses procédures retenues par l'enseignant lors de la mise en commun à partir des productions des différents groupes.

Pistes de prolongements

> **Problème 1**
>
> Montrer que la somme des carrés de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5.

> **Problème 2**
>
> Trouver le nombre de zéros qui termine le produit des nombres entiers consécutifs de 1 à 100.

Problème 3

Accord de sixte (pépinière mathématique de troisième octobre 2017- académie de Versailles : corrigé disponible)

Déterminer six entiers consécutifs et non multiples de 7 dont la somme soit un carré parfait.

Problème 4

Faire bonne impression (pépinière mathématique de seconde - 2021- académie de Versailles : corrigé disponible)

Le service reprographie d'une entreprise dispose de deux imprimantes identiques. Une fois lancées, elles enchaînent sans délai les documents et vont à la même vitesse (le temps d'impression de chaque page est considéré être le même). Préciser comment faire en sorte que les durées de service soient égales ou les plus voisines possibles dans chacune des situations suivantes :

On doit imprimer quatre documents comportant 1, 3, 5 et 7 pages.

On doit imprimer cinq documents comportant 1, 3, 5, 7 et 9 pages.

On doit imprimer cinquante documents dont les nombres de pages sont tous les nombres impairs compris entre 1 et 99.

n étant un entier donné, on doit imprimer n documents dont les nombres de pages sont tous les nombres impairs compris entre 1 et $2n - 1$.

Ressources complémentaires

Ressources thématiques cycle 4 « Nombres et calculs » : Divisibilité et nombres premiers
https://eduscol.education.fr/280/mathematiques-cycle-4