Puissances

Un exemple de tâche intermédiaire : nombres de Mersenne et nombres parfaits

ATTENDUS DE FIN DE CYCLE ; CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES ASSOCIÉES

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes :
- définition des puissances d'un nombre (exposant entier positif) ;
- effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances ;
- vérifier la vraisemblance d'un résultat, en estimant son ordre de grandeur ;
- pratiquer le calcul exact ou approché, à la main ou instrumenté.

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombre premier :
- notion de nombres premiers.

COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

Chercher, calculer, raisonner, communiquer.

Énoncé [3e]

Marin Mersenne (1588-1648) était un religieux français érudit, philosophe, mathématicien et physicien. Il s'est intéressé à de nombreux domaines (acoustique, chute des corps, arithmétique, ...). Il a fourni une liste de nombres de la forme $2^2 - 1$, $2^3 - 1$, $2^5 - 1$, ..., jusqu'à $2^{257} - 1$, où chacun des exposants (2, 3, 5, ..., 257) est un nombre premier. Pour lui rendre hommage, on appelle aujourd'hui nombres de Mersenne les nombres de la forme $M_n = 2^n - 1$, où n est un entier naturel non nul.

1. À l'aide d'un tableur, calculer les nombres M_n pour tous les entiers n allant de 2 à 20.
2. Pour chacun des nombres premiers 2, 3, 5, 7, vérifier que les nombres de Mersenne M_2, M_3, M_5, M_7 sont des nombres premiers.
3. La conjecture « Les nombres de Mersenne M_n où n est un nombre premier sont des nombres premiers » est-elle plausible ? Vérifier que M_{11} admet un diviseur autre que 1 et lui-même. La conjecture précédente est-elle vraie ? Justifier
4. Le nombre M_{13} est-il premier ?
5. Un nombre parfait est un entier qui est égal à la somme de tous ses diviseurs positifs autres que lui-même. Ainsi 6 est un nombre parfait puisque les diviseurs de 6 autres que 6 sont 1, 2, et 3, et puisque 6 = 1 + 2 + 3.

Euclide a prouvé que l'on obtient des nombres parfaits à partir des nombres de Mersenne qui sont premiers, de la façon suivante : on multiplie le nombre de Mersenne par la puissance de 2 dont l'exposant est inférieur d'une unité à celui intervenant dans l'écriture du nombre. Ainsi, à partir du nombre de Mersenne premier $2^2 - 1$, on obtient le nombre parfait $6 = 2^{2-1} \times (2^2 - 1)$.
Vérifier le résultat d'Euclide pour les nombres de Mersenne M_3 et M_5.

Note
Les mathématiciens et les informaticiens recherchent aujourd'hui de très grands nombres premiers parmi les nombres de Mersenne, et ce dans le but de tester la puissance des nouveaux processeurs qui sont construits. Ces nombres ont une importance telle pour l'industrie informatique que le l'Electronic Frontier Foundation a donné en 2010 une récompense de 100 000 dollars US pour la découverte du plus grand nombre premier de Mersenne connu jusqu'alors :
le nombre $M_{43\,112\,609}$, qui s'écrit avec près de 13 millions de chiffres.

Pistes pédagogiques

Cette activité peut donner lieu à une recherche de groupe, chaque élève d'un même groupe se répartissant les différentes tâches, avec une mise en commun finale. Un des élèves du groupe peut par exemple contribuer à la recherche en dressant une liste de nombres premiers.
La question 4 peut n'être posée qu'aux élèves les plus rapides. Cette différenciation peut s'étendre aux différents prolongements possibles :

- examen de la primalité d'autres nombres de Mersenne ;
- estimation du nombre de chiffres de (dans ce cas, ne pas donner cette estimation dans l'énoncé) ;
- recherches documentaires (sur Mersenne, sur Euclide, sur le plus grand nombre premier de Mersenne connu, ...) ;
- recherche d'autres nombres parfaits.