Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3

Exemples illustrant la notion de coefficient de proportionnalité

Ce document concerne plus particulièrement les enseignants de la dernière année du cycle 3.

Exemple 1

ÉNONCÉ
Les gâteaux mentionnés coûtent tous le même prix. Calculer le prix à payer pour l'achat de 10 gâteaux sachant que le coût pour 6 de ces gâteaux est de 5,40 €.

Ce premier problème vise la recherche d'une quatrième proportionnelle. On présente ici deux procédures possibles : d'une part celle du calcul, puis de l'utilisation du coefficient de proportionnalité, d'autre part celle du passage par l'unité. Si l'élève n'est pas amené à oraliser sa démarche, il est difficile de savoir laquelle de ces deux procédures il a utilisée, puisqu'elles mènent toutes deux au même calcul, à savoir 10 × (5,40 : 6) = 9. **Pour donner du sens aux calculs effectués, il est important d'amener les élèves à expliciter leurs procédures et à exprimer les grandeurs dans des unités.**

Détermination puis utilisation d'un coefficient de proportionnalité

Le coefficient de proportionnalité est la grandeur quotient « prix à payer par gâteau ». Il a du sens pour les élèves.

Exprimé avec son unité (euro par gâteau), il vaut 5,40 € / 6 gâteaux = 0,90 €/gâteau.

La grandeur « prix à payer » est le produit de la grandeur « nombre de gâteaux » par le coefficient de proportionnalité.

Si les grandeurs sont exprimées avec leurs unités, le prix de 10 gâteaux est :

10 gâteaux × (5,40 / 6 €/gâteau) = 10 gâteaux × 0,90 €/gâteau = 9 €

Si les grandeurs ne sont pas exprimées avec leurs unités, le prix de 10 gâteaux est :

$$10 \times (5{,}40 \div 6) = 10 \times 0{,}9 = 9$$

Ce seul calcul ne permet pas de donner du sens à la notion de proportionnalité

NOMBRE DE GATEAUX	6	10
Prix à payer en euros	5,40	?

Utilisation de la linéarité pour passer par l'unité

Le passage par l'unité correspond au calcul du prix d'un gâteau.
Si les grandeurs sont exprimées avec leurs unités :

- si 6 gâteaux coûtent 5,40 €, alors 1 gâteau coûte 6 fois moins, c'est-à-dire 5,40 € ÷ 6 = 0,90 € ;
- si 1 gâteau coûte 0,90 €, alors 10 gâteaux coûtent 10 fois plus, c'est-à-dire 0,90 € × 10 = 9 €.

Le passage par l'unité donne le prix d'un gâteau, soit 0,90 €. Seule l'unité change par rapport au coefficient de proportionnalité précédent. On retrouve le même calcul que précédemment :

$$10 \times (5{,}40 \div 6) = 10 \times 0{,}9 = 9$$

Sans l'usage des unités, il ne fait pas sens.

NOMBRE DE GATEAUX	1	6	10
Prix à payer en euros	?	5,40	?

Exemple 2

ÉNONCÉ
Sur une carte routière, 2 cm représentent 5 km sur le terrain. Sur cette carte, la distance entre deux villes est de 7 cm. Quelle est la distance réelle entre ces deux villes ?

Ce deuxième problème vise aussi la recherche d'une quatrième proportionnelle.
Par rapport au problème précédent, la différence provient du fait que les deux grandeurs considérées sont de même nature (une longueur).

Ici encore, le passage par l'unité et la détermination puis l'utilisation du coefficient de proportionnalité sont deux techniques difficiles à différencier si les élèves ne verbalisent pas leurs procédures. Dans les deux cas, on peut recueillir : 7 × (5 : 2) = 17,5 qui ne permet pas de donner du sens (notamment à la notion d'échelle).

Détermination puis utilisation d'un coefficient de proportionnalité

Le coefficient de proportionnalité est la grandeur quotient « distance en réalité en km / distance sur la carte en cm ». Exprimé avec son unité, il vaut 5 km / 2 cm = 2,5 km/cm.

La grandeur « distance en réalité en km » est le produit de la grandeur « distance sur la carte en cm » par le coefficient de proportionnalité

Si les grandeurs sont exprimées avec leurs unités, 7 cm sur la carte représentent

7 cm × (5 / 2 km/cm) = (7 cm × (2,5 km/cm)) = 17,5 km dans la réalité.

Si les grandeurs ne sont pas exprimées avec leurs unités, le seul calcul

$$7 \times (5 : 2) = 7 \times 2{,}5 = 17{,}5$$

ne permet pas de comprendre le sens.

DISTANCE SUR LA CARTE EN CM	2	7
distance en réalité en km	5	?

Comme les deux grandeurs sont ici de même nature (une longueur), une conversion permet de les exprimer toutes deux dans la même unité (ici le cm est plus pertinent). Le coefficient de proportionnalité (longueur sur la carte en cm/longueur dans la réalité en cm) est alors une grandeur quotient sans unité (un nombre).

5 km = 5 000 m = 500 000 cm.

Le coefficient de proportionnalité vaut alors 500 000cm/2cm = 250 000.

La longueur dans la réalité (en cm) s'obtient alors en multipliant la longueur sur la carte (en cm) par le coefficient de proportionnalité 250 000.

7 cm sur la carte représentent donc :

7 cm × (500 000/2) cm/cm) = 7 cm × 250 000 = 1 750 000 cm = 17 500 m = 17,5 km.

On définit l'échelle d'une carte comme étant le rapport de la longueur sur la carte par la longueur dans la réalité (exprimées dans la même unité).

On a l'habitude d'exprimer l'échelle sous la forme d'une fraction irréductible de numérateur 1.

Ici l'échelle vaut :

(2 cm) / (500 000 cm) = (2 / 500 000) cm/cm = 2 / 500 000 = 1 /250 000.

Utilisation de la linéarité pour passer par l'unité

Le passage par l'unité correspond au calcul, dans la réalité, de ce qui est représenté par 1 cm sur la carte.

Si 2 cm sur la carte représentent 5 km en réalité, alors 1 cm sur la carte représente la moitié, c'est-à-dire 5 km ÷ 2 = 2,5 km dans la réalité.

Si 1 cm sur la carte représente 2,5 km en réalité, alors 7 cm sur la carte représentent 7 fois plus, c'est-à-dire 2,5 km × 7 = 17,5 km dans la réalité.

On retrouve ainsi le même calcul que précédemment :

$$7 \times (5 : 2) = 7 \times 2,5 = 17,5$$

mais ce seul calcul ne permet de comprendre le raisonnement suivi.

DISTANCE SUR LA CARTE EN CM	1	2	7
distance en réalité en km	?	5	?