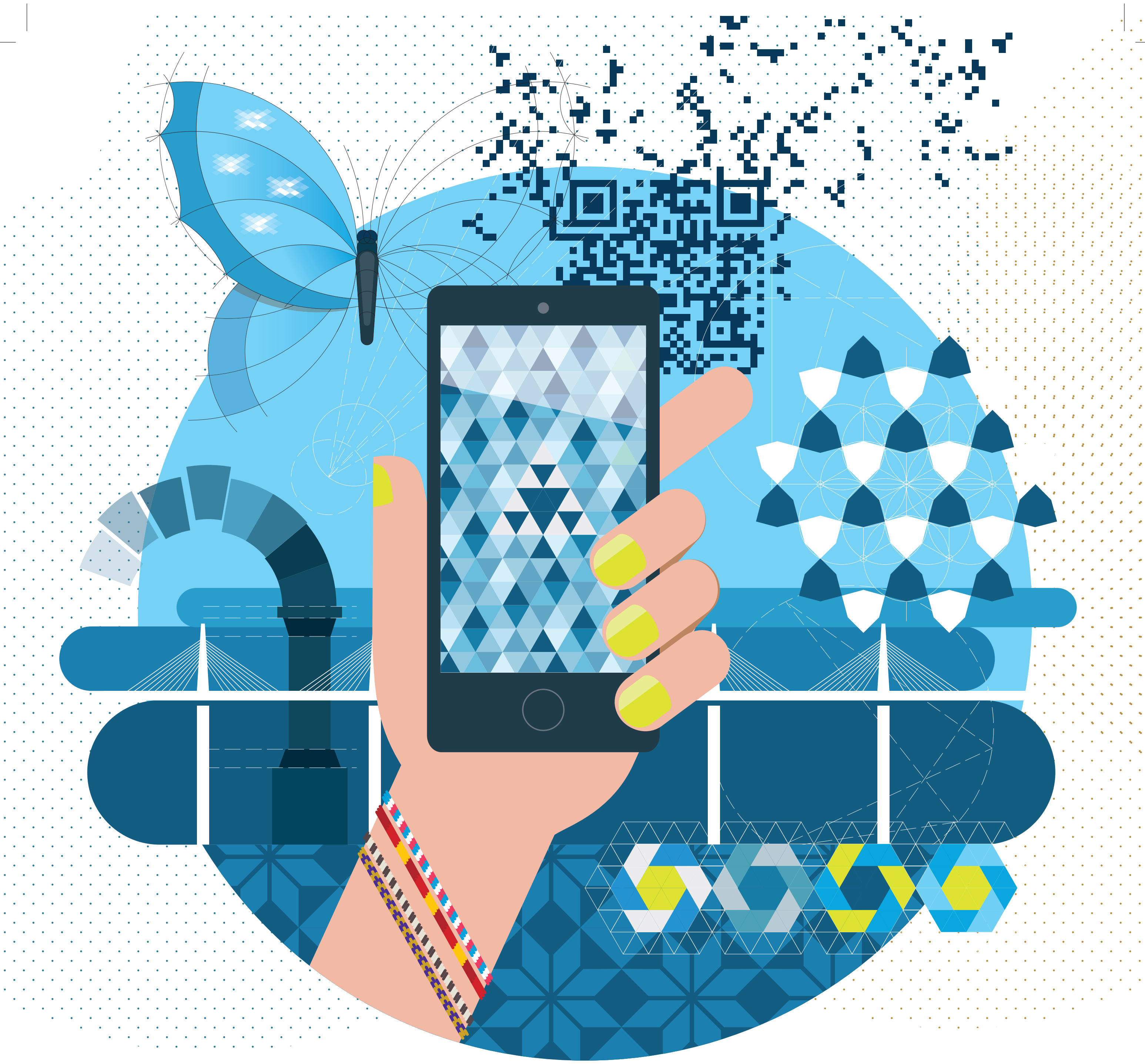


19e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

5 JUIN 2019

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

En partenariat avec :

hp — Inria (Inventeurs du monde numérique) — Texas Instruments — Crédit Mutuel Enseignant — CASIO — Google — École Polytechnique (Université Paris-Saclay)

SOMMAIRE

Remise nationale des prix des Olympiades de Mathématiques 2019

Mercredi 5 juin 2019, monsieur Karim ZAYANA, inspecteur général de Éducation nationale, président du jury, remet les prix nationaux des 19èmes Olympiades nationales de mathématiques, à l'amphithéâtre Poincaré, 25 rue de la Montagne-Sainte-Geneviève – Paris 5e.

Créées en 2001, initialement pour les élèves des classes de premières scientifiques, les Olympiades ont ensuite été ouvertes aux autres séries, aux élèves de Terminale scolarisés selon le calendrier de l'hémisphère Sud, et à une participation en équipes. 22 000 élèves de métropole, des outre-mer et des lycées français de l'étranger ont ainsi concouru en 2019 aux Olympiades nationales de mathématiques. Cet effectif, stable par rapport aux éditions récentes, confirme l'engagement des académies à tous les niveaux. Le développement des Olympiades scientifiques, toutes disciplines confondues (sciences de l'ingénieur, physique, géosciences, chimie) dans tout le réseau des lycées de France, mais aussi de l'étranger (AEFE et MLF), montre l'engouement des jeunes générations à prendre part à ces événements.

L'épreuve, d'une durée de quatre heures, consiste en quatre exercices indépendants : deux exercices sont communs à tous les candidats d'une même zone géographique (jusqu'à six fuseaux horaires), les deux autres sont conçus par les cellules académiques et peuvent être résolus en équipes de constituées de 2 à 4 candidats. Quand l'établissement d'origine des candidats est mixte, les équipes doivent l'être aussi (dans la mesure du possible à parité). Chaque académie établit un classement académique, et fait parvenir au jury national une sélection des meilleures copies sur la partie nationale. Un palmarès national est alors établi. **Le palmarès national 2019 distingue quarante élèves, issus de 14 académies et de cinq zones d'établissements de l'étranger (AEFE).**

La manifestation est soutenue par des partenaires nationaux : Casio, Texas Instruments, Hewlett-Packard, le Crédit Mutuel Enseignant, Google, Inria, l'École polytechnique. S'y ajoutent souvent des partenaires académiques locaux, en particulier des éditeurs.

Le jury national est composé d'inspecteurs, de professeurs, d'ingénieurs et directeurs de recherche. Avec sa collaboration, l'APMEP - association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public - met en ligne sur son site les annales corrigées de toutes les éditions antérieures. Ces ressources constituent un outil pédagogique précieux au service des futurs candidats et des enseignants dans le quotidien de leurs classes (cours traditionnel, accompagnement personnalisé, ateliers …).

La remise nationale des prix est organisée par le ministère en collaboration avec Animath, association fondée en 1998, qui fédère les principales composantes de la vie associative française, pour promouvoir les mathématiques.

Les Olympiades de Mathématiques
Enjeux et objectifs

Le Ministère de l'Éducation nationale et de la jeunesse a à cœur de soutenir les actions éducatives de culture scientifique car elles contribuent à donner le goût des études scientifiques à nos élèves. Il est en effet essentiel de former des jeunes dans ces domaines pour que la France garde et conforte son avance scientifique et son excellence. Les Olympiades de mathématiques en sont un des exemples.

Les olympiades de mathématiques, comme les autres olympiades scientifiques, permettent aux élèves d'être confrontés à des situations de recherche individuelle ou par équipe. La stratégie nationale de culture scientifique, technique et industrielle de février 2017 a pour ambition de donner aux futures citoyennes et aux futurs citoyens les moyens de développer et renforcer leur curiosité, leur ouverture d'esprit, leur esprit critique en partageant la culture scientifique et la démarche scientifique.

Les **Olympiades nationales de mathématiques** s'inscrivent pleinement dans **la stratégie mathématique qui** vise la maîtrise des savoirs et des compétences mathématiques par tous les élèves. Cette action éducative contribue en effet à donner une nouvelle image des mathématiques en encourageant l'appétence des élèves pour les mathématiques (axe 3, mesure 9).

Comme le préconise le rapport Villani-Torossian, il s'agit notamment de

- susciter chez nos élèves un plaisir d'apprendre tout en pratiquant les mathématiques
- inciter et encourager tous les élèves qui le peuvent, et notamment les jeunes filles, à accéder aux filières scientifiques.

Les **Olympiades nationales de mathématiques** contribuent à relever ces défis : ouvertes aux **lycéens volontaires de première et de terminale** (calendrier sud) **de toutes les séries** générales et technologiques de l'enseignement public et privé sous contrat en France ou en convention avec le réseau de l'Agence pour l'enseignement français à l'étranger (AEFE), elles ont pour objectifs de :

- favoriser l'émergence d'une **nouvelle culture scientifique ;**
- stimuler chez les élèves **l'initiative et le goût de la recherche ;**
- permettre aux élèves d'aborder les problèmes mathématiques de manière ouverte, en autorisant des approches originales.

Cette année, les épreuves se sont déroulées au cours de la 8ème édition de la Semaine des mathématiques : le mardi 12 mars 2019 en Polynésie française et le mercredi 13 mars 2019 pour tous les autres participants. L'épreuve dure quatre heures et est composée de quatre exercices, dont, dans plus de la moitié des académies, deux qui peuvent être résolus en équipes mixtes. Pour en savoir plus les olympiades de mathématiques, rendez-vous sur éduscol : http://eduscol.education.fr/cid46901/olympiades-nationales-de-mathematiques.html

19èmes Olympiades nationales de Mathématiques
Programme de la journée du mercredi 5 juin 2019

8h30	**Accueil des lauréats, de leurs professeurs et des invités**
10h15	**Ouverture de la cérémonie par Karim ZAYANA,** *Inspecteur général de l'Education nationale et président du jury national*
10h25	**Allocution de Fabrice ROUILLIER,** *Président d'Animath*
10h30	**Conférence de Cécile GACHET et Lê NGUYEN HOANG,** Croissance ou décroissance, il faut choisir ! *Cécile Gachet est étudiante M2 au département de mathématique de l'ENS Ulm (Ecole nationale supérieure de Paris),* *Lê Nguyen Hoang est Youtubeur, chaîne Science4all, et médiateur scientifique de l'EPFL (Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne)*
11h10	**Remise des prix par les partenaires nationaux**
12h15	**Photographie de groupe**
12h30	**Pause méridienne**
13h30	**Conférence de Igor KORTCHEMSKI** Six degrés de séparation : comment prévoir l'imprévisible ? *Chargé de recherche CNRS au CMAP (Ecole polytechnique, Université Paris-Saclay)*
15h00	**Collation et discussion entre lauréats et mathématiciens**
16h00	**Fin**

Les partenaires

Animath a été fondée en 1998 à l'initiative de la Société mathématique de France, avec le soutien de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, de la Société de mathématiques appliquées et industrielles, de la Société française de statistique, de *femmes et mathématiques*, de l'Inspection générale de mathématiques, ainsi que d'associations : Math en Jeans, Comité international des jeux mathématiques, Fédération française de jeux mathématiques, Maths pour tous, Kangourou international, *etc.*.

L'association a pour but de rendre attractives les activités autour des mathématiques par de multiples initiatives (stages, tutorats, écoles d'été) allant de la sensibilisation (conférences un texte un mathématicien en collaboration avec la SMF, participation au salon des jeux mathématiques, etc.) à la préparation aux compétitions les plus sélectives (par exemple les Olympiades Internationales de Mathématiques ou l'European Girls Mathematical Olympiad).

Animath contribue également à l'effort général pour préserver l'égalité des chances. Avec l'association *femmes et mathématiques,* des actions spécifiques sont menées pour encourager les filles à s'engager dans des études scientifiques longues (journées Filles et maths, une équation lumineuse, Rendez-vous des Jeunes Mathématiciennes. Avec le ministère de l'Éducation nationale et la fondation des sciences mathématiques de Paris, Animath contribue à la mise en place des stages MathC2+, s'adressant prioritairement aux élèves éloignés de la culture scientifique et des zones économiquement défavorisées.

L'association propose aussi plusieurs activités dont le but est de sensibiliser les jeunes aux métiers de la recherche en mathématiques :

- le Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens (TFJM^2)est une compétition par équipes portant sur des problèmes ouverts, représentant une véritable expérience de recherche ;
- ITYM (International Tournament of Young Mathematicians), modèle international de la compétition TFJM^2 ;
- le concours Alkindi, organisé en collaboration avec l'association France-IOI, concours par équipes autour de la cryptanalyse qui a regroupé plus de 60 000 participants lors de l'édition 2018-2019 ;
- la coupe Animath, qui s'adresse à des élèves très motivés et de très bon niveau, de la 4ème à la 1ère. C'est un des outils de détection mis en œuvre pour impliquer dans ces activités des filles et des garçons de toute la France. Parmi les participants à ce programme figurent les lauréats des Olympiades nationales mathématiques, ainsi que ceux d'autres compétitions mathématiques.

Animath a pour projet à court terme d'étendre sensiblement ses activités en proposant plus de contenus virtuels pour permettre aux candidats les plus isolés de participer à un nombre grandissant d'activités. Parmi les expérimentations actuellement menées, Mathmosphère, stage virtuel, se déroule à l'automne.

Animath s'est beaucoup investie pour que soient créées en 2001 les Olympiades nationales de mathématiques, en partenariat avec le Ministère de l'éducation nationale pour son organisation.
Depuis 1969, la France participe régulièrement aux Olympiades internationales de mathématiques. Chaque année, plus de 90 pays envoient leurs six meilleurs lycéens résoudre en temps limité (deux fois 4h30) six problèmes difficiles, mais où la sagacité prévaut sur les connaissances. La participation française à ces concours, et leur préparation, sont placées sous la responsabilité de la Préparation Olympique Française de Mathématiques, composante d'Animath : des stages sont organisés, ainsi qu'une préparation par correspondance.

Inria, institut national de recherche dédié au numérique, promeut « l'excellence scientifique au service du transfert technologique et de la société ». Inria emploie 2700 collaborateurs issus des meilleures universités mondiales, qui relèvent les défis des sciences informatiques et mathématiques. Son modèle ouvert et agile lui permet d'explorer des voies originales avec ses partenaires industriels et académiques. Inria répond ainsi efficacement aux enjeux pluridisciplinaires et applicatifs de la transition numérique. Inria est à l'origine de nombreuses innovations créatrices de valeur et d'emplois.

Le centre de recherche Inria de Paris comprend 600 personnes dont 520 scientifiques (répartis dans 35 équipes de recherche). Ses priorités scientifiques sont les suivantes :

- Réseaux et systèmes de communication
- Logiciels fiables et sécurité
- Modélisation du vivant et de l'environnement
- Simulation et apprentissage

Afin de rapprocher la recherche scientifique des lycées, Inria engage des actions vers les jeunes et développe les partenariats avec l'Éducation nationale notamment en s'associant aux Olympiades de mathématiques. Les objectifs des Olympiades trouvent un écho particulier à l'institut qui mène une politique de médiation scientifique active auprès des jeunes, pour leur faire connaître la recherche en informatique et en mathématiques et les innovations telles que la simulation médicale, l'interaction homme-machine, les réseaux de capteurs.

Texas Instruments est une entreprise spécialisée dans la conception, la fabrication et la vente de composants électroniques qui ont pour vocation d'améliorer la société dans laquelle nous vivons. Texas Instruments a notamment inventé le circuit intégré en 1958, ouvrant ainsi la voie au développement de l'informatique tel qu'on le connaît actuellement. Cette invention valut, en 2000, le prix Nobel de physique à Jack Kilby.

Texas instruments propose aujourd'hui un portefeuille diversifié de plus de 100.000 produits, qui effectuent de nombreuses fonctions, comme la conversion et l'amplification des signaux électroniques, la gestion et la distribution d'énergie, le traitement des données, l'amélioration de la résolution du signal et bien plus encore.
La majorité des produits se répartissent en deux grandes catégories :

- Les puces analogiques qui permettent de relier le monde réel au numérique en traduisant des phénomènes physiques.
- Les micro-processeurs qui sont les cerveaux électroniques permettant d'effectuer le traitement informatique et de faire fonctionner des systèmes simples à complexes.

Les lauréats des Olympiades de Mathématiques de 2019 auront un rôle à jouer dans l'évolution de la société numérique, en particulier s'ils se dirigent vers les métiers de l'ingénierie.

Enfin Texas instruments est surtout connue du grand public au travers des calculatrices numériques graphiques et les logiciels éducatifs qui depuis plus de 20 ans accompagnent des millions d'élèves à travers le monde dans la compréhension de concept scientifiques et dans l'interprétation des résultats. Depuis de nombreuses années Texas Instruments est très fier de soutenir les Olympiades de Mathématiques qui offrent l'opportunité à de nombreux élèves de manifester leur talent et d'en être récompensés.

Hewlett Packard s'attache à créer une technologie qui améliore la vie de chacun, partout — de chaque personne, chaque entreprise et chaque communauté aux quatre coins du globe. Cela nous motive à faire ce que nous faisons. À créer ce que nous créons. À inventer et à réinventer. À concevoir des expériences incroyables.

Les calculatrices HP - financières, scientifiques et graphiques – développées depuis plus de 50 ans en sont un bel exemple. De la première calculatrice scientifique de poche en 1972 à aujourd'hui, la première calculatrice graphique tactile couleur, HP accompagne enseignants et élèves en proposant des outils innovants pour faciliter les apprentissages et l'accessibilité des sciences pour tous.
Les objectifs des Olympiades nationales de mathématiques s'inscrivent dans notre vision et nous sommes heureux, à travers ce partenariat, d'encourager et stimuler l'intérêt des élèves pour les mathématiques, et plus largement pour les sciences.

« Nous continuerons d'aller de l'avant, car vous, élèves et futurs étudiants, continuerez d'aller de l'avant. Vous réinventez la façon dont vous travaillez. Dont vous jouez. Dont vous vivez. Continuez de vous réinventer. »

Le Crédit Mutuel Enseignant est au service de l'ensemble des personnels de l'Education nationale, de la Recherche, de la Culture, des Sports, de l'enseignement public agricole, ainsi que de leur famille. Il a l'intime conviction qu'une autre voie est possible en matière bancaire : celle du mutualisme et de la coopération. Pour cela, Il développe un service de bancassurance sur mesure et place depuis toujours la qualité de son offre au cœur de ses préoccupations. Il combine les avantages de la banque à distance avec son site internet (cybermut) et de la banque de proximité avec ses caisses et bureaux.

Le Crédit Mutuel participe à la formation des BTS banque soit en accueillant des stagiaires, soit en intervenant dans des sessions de formation. Il soutient les Olympiades de mathématiques tant au niveau académique qu'au niveau national. Il a apporté son aide, dès le départ, à l'action MathC2+ dont l'esprit est en symbiose avec la solidarité et la coopération. Les mathématiques, l'informatique sont des outils indispensables aux élèves d'aujourd'hui et le Crédit Mutuel encourage concrètement toutes les initiatives (Kangourou des maths, maths sans frontières, Math.en.Jeans…).

« Une banque au service de ses sociétaires c'est aussi une banque au service des enseignants dans leur travail quotidien et de leurs initiatives pédagogiques. »

L'École polytechnique est un établissement d'enseignement supérieur et de recherche de niveau mondial, fondée en 1794 au cours de la révolution française. Surnommée l'X, l'établissement est une école militaire placée sous la tutelle du ministère de la Défense.

Largement internationalisée (30% de ses étudiants, 39% de son corps d'enseignants sont étrangers), l'École polytechnique associe recherche, enseignement et innovation au meilleur niveau scientifique et technologique. Sa formation promeut une culture d'excellence à forte dominante en sciences, ouverte sur une grande tradition humaniste.

À travers son offre de formation : bachelor, cycle ingénieur polytechnicien, master, programmes gradués, programme doctoral, doctorat, formation continue, l'École polytechnique forme des décideurs à forte culture scientifique pluridisciplinaire en les exposant à la fois au monde de la recherche et à celui de l'entreprise. Avec ses 22 laboratoires, dont 21 sont unités mixtes de recherche avec le CNRS, le centre de recherche de l'X travaille aux frontières de la connaissance sur les grands enjeux interdisciplinaires scientifiques, technologiques et sociétaux.

Le modèle stratégique de l'École polytechnique repose sur trois piliers : enseignement, recherche, développement économique. L'innovation et l'entrepreneuriat sont devenus un axe majeur du développement de l'École notamment avec le lancement en 2015 d'un accélérateur dédié pour faire émerger des start-up technologiques.

Particulièrement impliquée sur les questions touchant à l'égalité des chances, l'École a créé en 2014 le Pôle Diversité et Réussite qui coordonne l'ensemble des actions destinées à diversifier le recrutement et à faire progresser l'École et l'enseignement supérieur sur les questions primordiales que constituent l'égalité sociale, l'égalité Femmes-Hommes et le Handicap.

Son modèle de formation, fondé sur des enseignements poussés dans plusieurs disciplines scientifiques et ouvert sur les humanités, a toujours été en adéquation avec les besoins de la société. Dotés d'un véritable esprit entrepreneurial et d'une expérience de la recherche grâce à la proximité des 22 laboratoires qui composent le centre de recherche de l'X, les étudiants de l'X sont prêts à s'attaquer à des problèmes complexes qu'il faudra traiter de manière transversale.

CASIO est une entreprise japonaise spécialisée dans les produits électroniques pour le grand public et les entreprises.
Calculatrices, montres, instruments de musique électroniques, appareils photo numériques, vidéoprojecteurs sans mercure... Ces inventions ont facilité l'utilisation des chiffres et de la langue, la gestion du temps ou encore l'accès à la musique au quotidien. Son credo "Créativité et Contribution" exprime l'engagement de l'entreprise en faveur de la société en offrant des produits à la fois utiles et originaux, créés à partir de rien.

Depuis la première calculatrice compacte électronique de 1957 jusqu'aux calculatrices graphiques équipées de programmation en langage Python d'aujourd'hui, CASIO a su accompagner professeurs et élèves pour proposer des outils innovants au service de l'apprentissage des sciences.

« C'est avec beaucoup de fierté que Casio est partenaire cette année encore des Olympiades nationales de mathématiques qui donnent aux élèves le goût des sciences et récompensent les plus talentueux. »

Google est une entreprise de technologie, dont l'objectif est d'améliorer l'accès de chacun à l'information. Les innovations de Google dans le domaine de la recherche ont fait de son site l'un des premiers du web, et de sa marque l'une des plus reconnues du monde.

L'intérêt de Google pour l'informatique semble évident : les développeurs de logiciels sont la pierre angulaire de l'entreprise, et pour pouvoir continuer à innover et créer des produits utiles au plus grand nombre, elle doit continuer à embaucher des ingénieurs talentueux. Mais l'ambition va bien au-delà de cela : la programmation offre aux élèves la possibilité de créer, et de littéralement changer le monde. En qualité d'employeur dans le secteur technique, Google souhaite faire en sorte que tous les élèves, de tous les horizons, comprennent l'importance et les possibilités qu'offre l'informatique, quelle que soit leur passion. Quiconque utilise la technologie doit également pouvoir avoir une influence sur elle et participer à son évolution.

C'est pourquoi cette année, Google parraine les Olympiades de mathématiques, et soutient en particulier la mise en place d'une journée de l'informatique au sein des stages MathC2+, afin de faire connaître l'informatique aux élèves les plus performants en mathématiques (et plus particulièrement aux filles).

Outre cela, Google accorde plusieurs subventions qui ont pour but de soutenir des programmes de cours afin de mieux inspirer les élèves et soutenir les enseignants (les RISE Awards mondiaux, La main à la pâte).

Liste des membres du jury national 2019

Karim Zayana, inspecteur général de l'Éducation nationale – groupe des mathématiques, président du jury national

Pierre Michalak, inspecteur d'académie-inspecteur pédagogique régional honoraire, académie de Versailles, vice-président du jury national

Michel Abadie, professeur agrégé, académie de Versailles

Clément Beauseigneur, ingénieur d'études Google

Antoine Crouzet, professeur agrégé, académie de Rennes

Patrick Genaux, professeur de chaire supérieure, académie de Strasbourg

Catherine Gufflet, inspectrice d'académie-inspectrice pédagogique régionale, académie de Lille

Pascale Louvrier, inspectrice d'académie-inspectrice pédagogique régionale détachée auprès de l'AEFE

Olivier Marty, ingénieur d'études Google

Claudine Picaronny, inspectrice générale de l'Éducation nationale – groupe des mathématiques

Evelyne Roudneff, inspectrice d'académie-inspectrice pédagogique régionale, académie de Versailles

Fabrice Rouillier, directeur de recherche, INRIA Paris

Hélène Tanoh, inspectrice d'académie-inspectrice pédagogique régionale, académie de Nancy-Metz

Christine Weill, inspectrice d'académie-inspectrice pédagogique régionale, académie de Versailles

Sujets nationaux des

Olympiades de Mathématiques 2019

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades nationales de mathématiques2019

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Triangles à côtés entiers*) et 2 (*Premières fois*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Triangles à côtés entiers*) et 3 (*AGADADAGA*).

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Triangles à côtés entiers

On dit qu'un triangle est un triangle entier si les longueurs de ses 3 côtés sont des entiers naturels non nuls.
On rappelle la propriété dite de l'« inégalité triangulaire » : dans tout triangle non aplati la longueur de chacun des côtés est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

1. ***a.*** Parmi les triplets (x, y, z) suivants, expliquer lequel désigne les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati, puis comment tracer ce triangle et avec quels outils :

(4, 4, 5) ; (3, 6, 9) ; (2, 2, 6)

b. Quelles sont les valeurs possibles de l'entier z si $(15, 19, z)$ désigne les longueurs des trois côtés d'un triangle entier non aplati rangées par ordre croissant de taille ?

c. Étant donné trois entiers naturels non nuls x, y et z tels que $x \leq y \leq z$, quelle condition faut-il ajouter pour que le triplet (x, y, z) désigne les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati ?

2. Soit p un entier naturel non nul. On désigne par E_p l'ensemble des triplets d'entiers naturels *rangés par ordre croissant* $x \leq y \leq z$ et désignant les côtés d'un triangle entier non aplati dont le périmètre est égal à p.
Ainsi obtiendrait-on $E_9 = \{(1, 4, 4), (2, 3, 4), (3, 3, 3)\}$.
a. Si le triplet (x, y, z) appartient à E_{18}, quelles sont les valeurs maximale et minimale pour z ?
b. Donner la composition de E_{18} et représenter dans un repère orthonormé l'ensemble des couples (x, y) pour lesquels il existe un entier naturel z tel que $(x, y, z) \in E_{18}$. Vérifier que ces couples se situent à l'intérieur ou sur les bords d'un triangle dont les sommets ont des coordonnées entières.

3. ***a.*** Justifier que si $(x, y, z) \in E_p$ alors $(x + 1, y + 1, z + 1) \in E_{p+3}$.

b. Soit $(x, y, z) \in E_{p+3}$. Déterminer une condition sur x, y et z pour que $(x - 1, y - 1, z - 1) \in E_p$.

c. En déduire que si p est impair alors E_p et E_{p+3} ont le même nombre d'éléments.

4. Étude de $E_{2\,019}$.
a. $E_{2\,019}$ contient-il un triplet (x, y, z) correspondant à un triangle équilatéral ?
b. $E_{2\,019}$ contient-il des triplets (x, y, z) correspondant à des triangles isocèles non équilatéraux? Si oui combien ?
c. Montrer que si $E_{2\,019}$ contient un triplet (x, y, z)correspondant à un triangle rectangle alors
$2\,019^2 = 4\,038(x + y) - 2xy$.
En déduire que $E_{2\,019}$ ne contient pas de triangle rectangle.

5. Dans cette question on se propose de dénombrer $E_{2\,019}$.

a. Soit $(x, y, z) \in E_{2\,022}$. On rappelle que $x \leq y \leq z$. Justifier que $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$.

b. Réciproquement, montrer que si $x \leq y$, $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ alors

$$(x, y, 2\,022 - x - y) \in E_{2022}.$$

c. Justifier que, dans un repère orthonormé, l'ensemble des couples (x, y) d'entiers naturels tels que $x \leq y$, $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ constitue l'ensemble des points à coordonnées entières d'un triangle ABC qui est rectangle. En déterminer l'aire $\mathcal{A}$ ainsi que le nombre de points à coordonnées entières situés sur ses côtés.

d. On admet le théorème de Pick : « Si un polygone $\boldsymbol{P}$ est tel que tous ses sommets sont à coordonnées entières dans un repère orthonormé alors son aire $\mathcal{A}$ est donnée par la formule $\mathcal{A} = i + \frac{j}{2} - 1$ où i désigne le nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur de $\boldsymbol{P}$ et j le nombre de ceux situés sur les côtés de $\boldsymbol{P}$. »

En déduire le nombre de triplets de $E_{2\,022}$ puis celui de $E_{2\,019}$.

6. Une solution algorithmique
De manière générale, concevoir un programme (à retranscrire sur sa copie) permettant d'énumérer et de dénombrer E_p. Le tester sur E_{18} et sur $E_{2\,019}$.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Premières fois

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel qui a exactement 2 diviseurs entiers naturels distincts : 1 et lui-même. Par exemple : 2, 3 et 5 sont premiers alors que 0, 1 et 6 ne le sont pas.

Décomposition en produit de facteurs premiers :
Pour tout entier naturel $n \geq 2$, il existe un unique entier naturel k, une unique liste de nombres premiers distincts rangés dans l'ordre croissant $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_k)$ et une unique liste d'entiers naturels non nuls $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$ tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

On écrit, par exemple, $72 = 2^3 \times 3^2$ (ici $k = 2$), ou $32 = 2^5$ (dans ce dernier exemple, $k = 1$). La décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre premier p s'écrit simplement $p = p^1$.

Une fonction agissant sur les nombres entiers naturels
On souhaite savoir s'il est possible de considérer une fonction $\Delta\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ possédant les propriétés suivantes :
Propriété (1) : $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$;
Propriété (2) : Pour tout entier premier p, $\Delta(p) = 1$;
Propriété (3) : Pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) \times b + a \times \Delta(b)$.
1. Soit p un nombre premier. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^2)$? $\Delta(p^3)$? Un entier naturel n étant donné, quelle est l'image par Δ de p^n ?
2. ***a.*** Soit p et q des nombres premiers distincts, m et n des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^m \times q^n)$?
b. Le nombre $\Delta(10^n)$ est-il un multiple de 7 pour $n \geq 1$?
3. À tout nombre entier $n \geq 2$, dont la décomposition en produit de facteurs premiers s'écrit :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

on associe les quotients q_1 de n par p_1, q_2 de n par p_2,… , q_k quotient de n par p_k.
a. Montrer que si $n \geq 2$ alors,
$\Delta(n) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \cdots + \alpha_k \times q_k$.
b. Vérifier que l'expression ainsi obtenue satisfait les propriétés (2) et (3) ci-dessus.

Étude de quelques images d'entiers par la fonction Δ.
4. ***a.*** Calculer $\Delta(12), \Delta(56), \Delta(1\,001)$.
b. Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 0$?
c. Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 1$?
d. Tout entier naturel m a-t-il au moins un antécédent par Δ ?
e. Est-il vrai que, pour tout entier naturel $n, \Delta(n) \leq n$?
5. ***a.*** Montrer que si p et q sont des nombres premiers alors $\Delta(p \times q) = p + q$.
b. Est-il vrai que pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) + \Delta(b)$?
6. ***a.*** Est-il vrai que pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$?
b. Soient a et b deux entiers naturels tels que $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$ et un entier naturel quelconque k. Montrer que : $\Delta(ka + kb) = \Delta(ka) + \Delta(kb)$.

Les points fixes de la fonction Δ
7. ***a.*** Soit p un nombre premier. Soit m un entier naturel. On suppose que m est un multiple de p^p. Montrer que dans ce cas, $\Delta(m)$ est aussi un multiple de p^p.
b. Soit n un entier naturel et p un nombre premier. Soit α l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. On suppose que $\alpha \geq 1$. Montrer que si $\alpha < p$, alors $\alpha - 1$ est l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $\Delta(n)$.
8. Résoudre l'équation $\Delta(x) = x$.

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

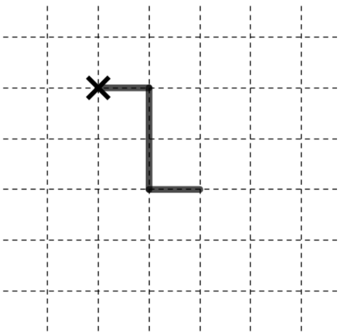
AGADADAGA

Dans cet exercice, on appellera *mot* toute suite de lettres formée des lettres A, D et G. Par exemple : ADD, A, AAADG sont des *mots*.
Astrid possède un logiciel qui fonctionne de la manière suivante : un utilisateur entre un *mot* et, après un clic sur EXÉCUTER, chaque lettre A du *mot* (s'il y en a) est remplacée par le *mot* AGADADAGA. Ceci donne un nouveau *mot*.
Par exemple, si l'utilisateur rentre le *mot* AGA, on obtient le *mot* AGADADAGAGAGADADAGA. Un deuxième clic sur EXÉCUTER réitère la transformation décrite ci-dessus au nouveau *mot*, et ainsi de suite.

1. Quels sont les mots qui restent inchangés quand on clique sur EXÉCUTER ?

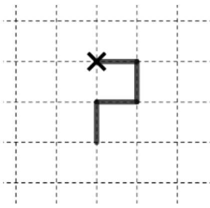
Traitement de texte
Astrid rentre le *mot* A.
2. Quel *mot* obtient-elle après avoir cliqué deux fois sur EXÉCUTER ?
3. Combien de clics au minimum faut-il pour obtenir un *mot* contenant un milliard de A ?
4. Après 20 clics, combien le mot obtenu contient-il de lettres D ?

Motif
Astrid souhaite maintenant dessiner un motif sur une feuille de papier quadrillé, en utilisant le dernier mot obtenu par le logiciel. Pour cela, elle lit de gauche à droite chaque lettre de ce mot et trace une ligne brisée sans lever le stylo en suivant les consignes suivantes :

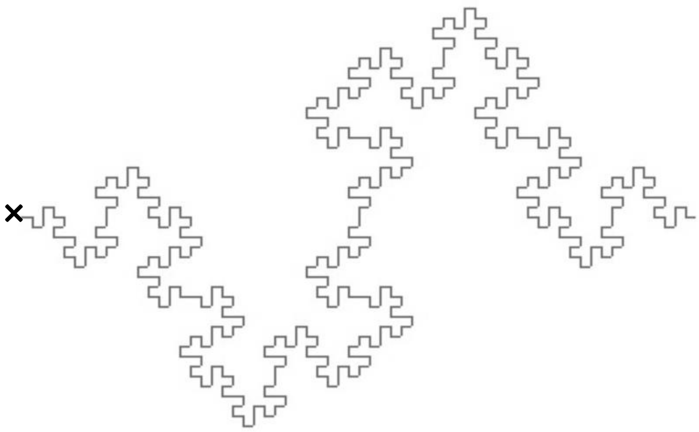


- Le point de départ de la ligne est une croix située sur un nœud du quadrillage ;
- si la lettre lue est A, elle trace horizontalement et de gauche à droite un segment de longueur un carreau ;
- si la lettre lue est G, elle tourne la feuille d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre ;
- si la lettre lue est D, elle tourne la feuille d'un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;
- quand toutes les lettres sont lues, elle remet la feuille dans la position initiale pour regarder le motif obtenu.

Par exemple, le motif obtenu à partir du *mot* ADAAGA est représenté à gauche.



5. Astrid a réalisé le motif de droite. Quel *mot* avait-elle obtenu ?
6. Astrid entre le *mot* A et clique deux fois sur EXÉCUTER. Dessiner le motif obtenu.
7. Astrid reprogramme le logiciel et remplace le mot AGADADAGA par un autre mot dont elle ne se souvient plus. Elle rentre le mot A et obtient le motif ci-dessous après avoir cliqué trois fois sur EXÉCUTER. Quel est le mot oublié par Astrid ?
8. On s'intéresse dans cette question uniquement aux motifs obtenus à partir de *mots* qui commencent par la lettre A, et se poursuivent en juxtaposant des séquences GA ou DA. On appelle *largeur* du motif le nombre de carreaux compris entre les points les plus à gauche et à droite du motif obtenu. Par exemple, la largeur du motif obtenu à partir du *mot* ADAGAGA est 2.



a. Quelle est la largeur du motif obtenu à partir du *mot* AGAGADA ?
b. Un *mot* conforme à l'hypothèse du **8.** comporte dix lettres D et dix lettres G. Déterminer toutes les largeurs possibles du motif obtenu.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades nationales de mathématiques2019

Amériques - Antilles - Guyane -

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Grands pairs…*) et 2 (*Des droites et des mots*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Grands pairs…*) et 3 (*Additionnons des points*).

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Grands pairs…

Dans ce problème, on ne considère que des nombres entiers naturels non nuls. Pour chacun de ces entiers, on numérote les chiffres de son écriture décimale de gauche à droite. Le premier chiffre de gauche ne peut être 0.
Par exemple, pour le nombre 3 021, le chiffre 3 reçoit le numéro 1, le chiffre 0 le numéro 2, le chiffre 2 le numéro 3 et le chiffre 1 le numéro 4.

On nomme « grand pair » tout nombre dont chaque chiffre en position paire, s'il y en a, est au moins aussi grand que ses chiffres directement voisins (s'il en a). On nomme « grand impair » tout nombre dont chaque chiffre en position impaire est au moins aussi grand que ses chiffres directement voisins (s'il en a).
Par exemple :
- le nombre 3 021 est un grand impair, mais pas un grand pair ;
- les nombres 3, 2, 7 et 777 sont à la fois des grands pairs et des grands impairs ;
- le nombre 2 019 n'est ni un grand pair, ni un grand impair.

1. Le nombre 384 957 est-il un grand pair ? Un grand impair ?

2. Déterminer les nombres qui sont à la fois des grands pairs et des grands impairs.

3. Parmi les nombres s'écrivant avec deux chiffres, y a-t-il davantage de grands pairs ou de grands impairs ?

4. ***a.*** Le nombre 3 021 peut-il s'écrire comme la somme de deux grands impairs ayant le *même* nombre de chiffres ?
b. Le nombre 3 021 peut-il s'écrire comme la somme de deux grands pairs ayant le *même* nombre de chiffres ?

5. Prouver que tout nombre entier peut s'écrire comme la somme de deux grands impairs (rien n'est ici imposé quant au nombre de chiffres de ces deux grands impairs).

6. Démontrer que tout nombre grand impair strictement inférieur à 100 peut s'écrire comme la somme de deux grands pairs (sans contrainte quant au nombre de chiffres de ces grands pairs).

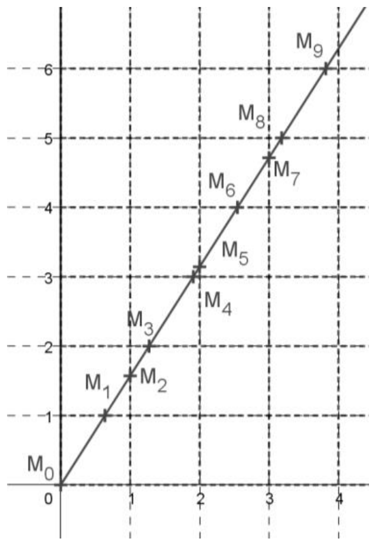
7. Déterminer le plus petit grand impair supérieur ou égal à 2 qui ne peut pas s'écrire comme la somme de deux grands pairs (sans contrainte quant au nombre de chiffres de ces grands pairs).

8. Compléter le pseudocode ci-dessous (ou s'en inspirer) pour rédiger un algorithme (à retranscrire sur sa copie), qui, partant d'un tableau « T » représentant un nombre « N » (par exemple 384 957) de « nb » chiffres (ici 6), renvoie « 1 » si N est un grand pair, et « 0 » sinon :

```
nb = 6                                    ## Commentaire : ici N = 384 957 est à 6 chiffres
T  = [3 ; 8 ; 4 ; 9 ; 5 ; 7]              ##Commentaire : ici T[1] = 3, T[2] = 8, T[3]=4, … ,T[nb]=7
resultat = 1
i = 1
…
while ((resultat == 1) and i≤ nb) :
          … … …
          i = i+2
print(resultat)
```

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Des droites et des mots



Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Dans tout le problème, on s'intéresse aux demi-droites issues de O et contenues dans le premier quadrant (ensemble des points du plan dont l'abscisse et l'ordonnée sont positives). À tout entier naturel n, on associe la droite d'équation $x = n$ et la droite d'équation $y = n$. L'ensemble de ces droites constitue un « quadrillage ».
Toute demi-droite (d) issue de O et de pente strictement positive possède des points d'intersection notés $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \dots, \mathrm{M}_n, \dots$ avec les droites du quadrillage, les points étant numérotés dans l'ordre croissant de leurs abscisses. À chaque point M_i on associe la lettre H, la lettre V ou la lettre C selon qu'il est le point d'intersection de (d) avec une droite horizontale, une droite verticale ou les deux à la fois. On construit ainsi des « mots » de longueur infinie. Le mot correspondant à la figure ci-contre débute par : CHVHHVHVHH.

1. Représenter, dans un reprère orthonormé d'unité 1 cm, la demi-droite d'équation $y = 1{,}5x$ et donner les huit premières lettres du mot qu'on peut lui associer.
2. Pourquoi les mots associés aux demi-droites commencent-ils tous par la lettre C ?

Un mot est dit « périodique » si une séquence se répète indéfiniment à partir de la première lettre. On appelle « motif » la plus petite séquence qui sé répète indéfiniment et « période » le nombre de lettres du motif.
Par exemple, CVVCVVCVVCVV … est un mot périodique de période 3 dont le motif est CVV.

3. Déterminer et représenter la demi-droite qui donne naissance au mot périodique de période 3 de motif CVV.

4. *a.* Montrer que si on rencontre la séquence VV dans le mot associé à une demi-droite, alors la pente de cette demi-doite est strictement inférieure à 1.
b. Que peut-on dire de la pente d'une demi-droite si on rencontre la séquence HH dans le mot associé ?
c. Tous les mots associés à une demi-droite commencent par C. Tout mot commençant par C est-il associé à une demi-droite ?

5. On suppose dans cette question que le point M_6 est associé à la septième lettre d'un mot de période 6. Quelles sont les droites pouvant conduire à ce résultat ? Quels mots leur sont associés ?

6. Énoncer et prouver une condition nécessaire et suffisante portant sur la pente d'une demi-droite pour que le mot qui lui est associé soit périodique.

7. On donne un entier naturel p non nul. Est-il possible de trouver un mot périodique de période p ?

8. Soit W le mot correspondant à la demi-droite de pente $\sqrt{2}$. Pour tout entier naturel n, le point d'intersection de la demi-droite avec la droite d'équation $x = n$ a pour lettre associée V : pourquoi ? On appelle $F_W(n)$ le nombre de lettres H précédant V dans l'écriture de W. La suite de terme général $\frac{F_W(n)}{n}$ possède-t-elle une limite ?

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

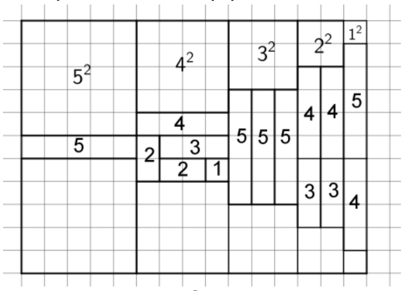
Additionnons des points

Somme de carrés

Un nombre entier n étant donné, on cherche dans cette partie à estimer

$$S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$$

Sur la photo ci-contre, on a représenté une pyramide de boulets de pierre, à base carrée, avec 6 étages qui contiennent $6^2, 5^2, \ldots, 1$ boulets. Le nombre de boulets qui la composent est $S(6) = 91$.



1. Dans le cas $n = 5$, le puzzle présenté à gauche permet d'estimer $S(5)$. Comment ? Quelle valeur obtient-on par cette méthode ?

2. Les exemples précédents inspirent la formule $S(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

a. Montrer que l'entier $n(n+1)(2n+1)$ est bien un multiple de 2 et de 3.

b. Si on suppose que pour un certain n, sur lequel on ne fait aucune autre hypothèse, $S(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, quelle formule obtient-on pour $S(n) + (n+1)^2$? On peut donc décider que la formule de $S(n)$ est vraie pour tout entier n.

3. Montrer que $S(24)$, somme des 24 premiers carrés, est un carré.

Addition sur une courbe

On considère l'ensemble (E) des points du plan dont les coordonnées (x, y) satisfont la relation

$$y^2 = \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$$

4. Un peu d'exploration

a. Les points de coordonnées $(1, 1)$ et $(24, 70)$ appartiennent-ils à cet ensemble ? Fournir deux autres exemples.

b. Les points de coordonnées $(-2, 1)$ et $\left(-\frac{1}{4}, 3\right)$ appartiennent-ils à (E) ?

c. Quelles relations doit vérifier le réel x pour qu'il y ait un point d'abscisse x dans l'ensemble (E) ? Dans ce cas, combien y a-t-il de points d'abscisse x dans (E) ?

5. La forme de la courbe

a. Sur l'annexe qui servira aux tracés, on a représenté l'ensemble (E) qu'on appellera dorénavant courbe (E). On peut identifier des « branches infinies ».

Comment expliquer que le quotient $\frac{3y^2}{x^3}$ s'approche de 1 lorsque l'abscisse x du point de coordonnées (x, y) de la courbe devient très grande ? On a alors $\approx \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{3}}$.

b. Expliquer pourquoi la courbe (E) présente une partie « fermée ».

6. Somme de deux points

a. Sur la feuille annexe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe (E). Pour tout couple (A, B) de points distincts de la courbe (E), on trace la droite (AB). Quand elle recoupe la courbe en un troisième point D, on note $\mathrm{A}\oplus\mathrm{B}$ le symétrique de D par rapport à l'axe des abscisses. Représenter le point $\mathrm{A}\oplus\mathrm{B}$ sur la figure 1.

b. Pour tout point A de la courbe (E), on trace la tangente en A à la courbe (E). Quand elle recoupe la courbe (E) en un point D, on note $\mathrm{A}\oplus\mathrm{A}$ le symétrique de D par rapport à l'axe des abscisses. Représenter le point $\mathrm{A}\oplus\mathrm{A}$ sur la figure 2.

c. On note 2A = $\mathrm{A}\oplus\mathrm{A}$, 3A= $\mathrm{A}\oplus 2\mathrm{A}$, etc. Représenter le point 3A sur la figure 3.

7. Un système de codage

La correspondance entre Alice et Bruno est protégée par une clef : les quatre premières décimales de l'abscisse du point $ab\mathrm{M}$, obtenu de la manière suivante :

1. Ils choisissent ensemble un point M sur la courbe (E) ;
2. Alice choisit un entier a et ne donne à Bruno que les coordonnées du point $a\mathrm{M}$;
3. Bruno choisit un entier b et ne donne à Alice que les coordonnées du point $b\mathrm{M}$;

Dans ce processus, ils choisissent le point M de coordonnées (1, 1). Alice donne à Bruno les coordonnées (0,02083333, 0,06076389). Bruno donne à Alice les coordonnées (0,02908309, −0,07265188). En s'aidant du tableau fourni en regard, indiquer quelle est la clef.

k	Abscisse du point $k\mathrm{M}$	Ordonnée du point $k\mathrm{M}$
1	1	1
2	0,02083333	0,06076389
3	5,63265731	−8,73904883
4	1,06401114	1,07001139
5	0,02908309	−0,07265188
6	3,93363878	5,35550512
7	0,651426	−0,64256859
8	0,00115486	0,01389763
9	107,8640	−651,271826
10	26,5927	81,40364156

Nom ou numéro d'anonymat du candidat……………………………………………………..

À RENDRE AVEC LA COPIE

Annexe « Additionnons des points »

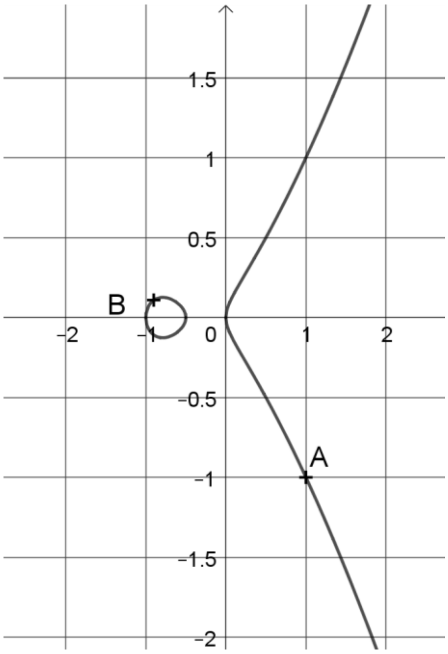


Figure 1

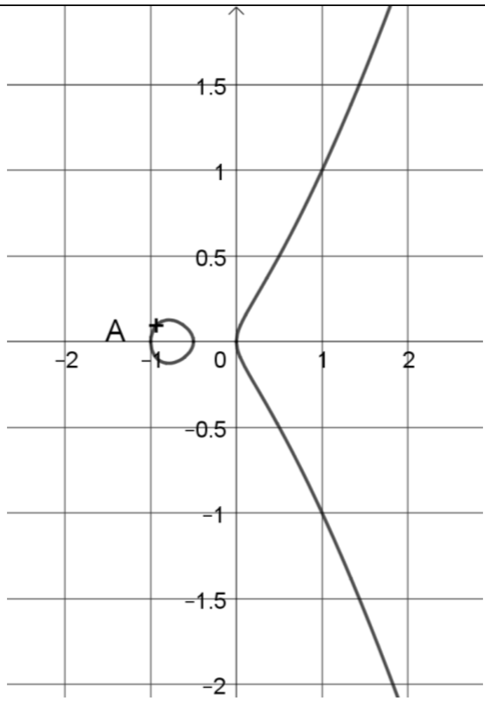


Figure 2

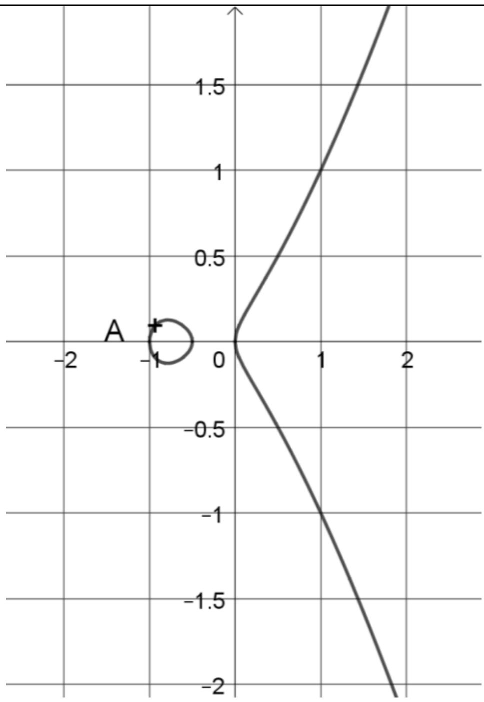


Figure 3

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades nationales de mathématiques2019

Asie - Pacifique - Nouvelle Calédonie - Polynésie Française

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*La tête aux carrés*) et 2 (*Ne dérange pas mes cercles !*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*La tête aux carrés*) et 3 (*Clairs horizons*).

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

La tête aux carrés

Soit n un entier naturel, on dit que n est « décomposable en somme de carrés » s'il est égal à une somme de carrés d'entiers naturel. Par exemple 0, 10 et 33 admettent pour décompositions en carrés : $0 = 0^2$, $10 = 3^2 + 1^2$ et $33 = 5^2 + 2^2 + 2^2$.

Partie préliminaire

1. Écrire une décomposition en somme de carrés de chacun des nombres 5 et 22.

2. Ces décompositions sont-elles les seules sommes de carrés égales à 5 ou à 22 ?

3. Tout entier naturel non nul est-il décomposable en somme de carrés ?

Avec deux carrés seulement

Dans cette partie on s'intéresse aux entiers naturels n décomposables en somme de deux carrés, c'est-à-dire pour lesquels il existe deux entiers naturels a et b tels que $n = a^2 + b^2$.

On appelle ces entiers naturels des « nombres bicarrés ».

Par exemple, 1, 18 et $1\,402$ sont des nombres bicarrés car $1 = 1^2 + 0^2$, $18 = 3^2 + 3^2$, $1\,402 = 31^2 + 21^2$.

4. Le nombre 58 est-il un nombre bicarré ?

5. Le nombre 21 est-il un nombre bicarré ?

6. Y a-t-il une infinité de nombres bicarrés ?

7. Dans cette question, on s'intéresse au produit de deux nombres dont chacun est un nombre bicarré.

a. Commencer par montrer l'égalité de Lagrange, valable pour tous nombres a, b, c et d :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

b. En déduire une décomposition en somme de deux carrés de 18×58.

c. En déduire également une décomposition en somme de deux carrés du double d'un nombre bicarré.

d. Montrer que la moitié d'un nombre pair bicarré est un nombre bicarré.

e. $1\,344$ est-il un nombre bicarré ?

f. Existe-t-il une infinité de nombres pairs bicarrés ?

g. Existe-t-il une infinité de nombres pairs qui ne sont pas bicarrés ?

Avec quatre carrés

Dans cette partie on s'intéresse aux entiers naturels décomposables en sommes de carrés pour lesquels il existe une décomposition en somme de quatre carrés.

Par exemple $43 = 5^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2$ et $42 = 5^2 + 4^2 + 1^2 + 0^2$

Joseph Louis Lagrange démontra en 1770 que tout nombre entier naturel est décomposable en quatre carrés.

8. Écrire un algorithme fournissant une décomposition en quatre carrés d'un entier N lorsque cela est possible.

9. ***a.*** Si on veut trouver une décomposition en quatre carrés du nombre $7\,044$, quel est le plus grand carré susceptible d'y figurer ? Y a-t-il une décomposition de $7\,044$ dans laquelle ce carré figure ?

b. Il existe une décomposition de $7\,044$ en somme des carrés de quatre nombres en progression arithmétique, dont le plus petit est 1. Quels sont ces quatre nombres ?

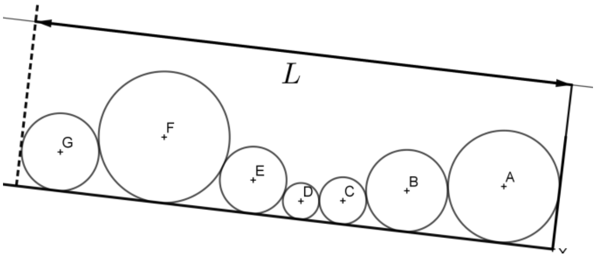
Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Ne dérange pas mes cercles !

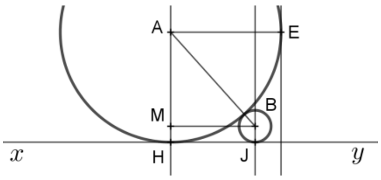
Selon la légende, *dernières paroles d'Archimède*

Encombrement d'une suite de disques

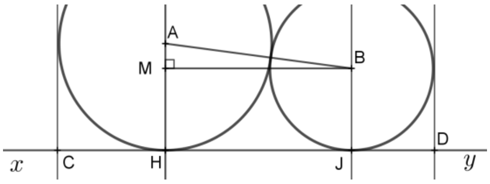
On place sur une étagère une série de rondelles de bois de même épaisseur, dont les rayons peuvent être différents. La légère pente donnée à l'étagère assure le contact : chaque disque est tangent à un ou des voisins. Le but du problème est d'étudier des dispositions qui minimisent l'encombrement L.



1. Cas de deux disques



Deux disques (centrés en A et B, de rayons R et r, tels que $r \leq R$) sont tangents respectivement en H et J. à la droite (xy), figure de droite.



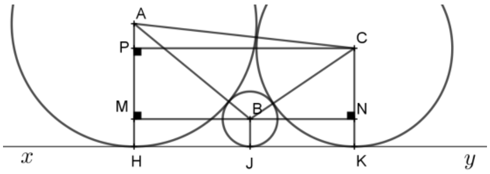
a. Exprimer en fonction de R le rayon maximal du petit disque r pour lequel l'encombrement créé par les deux disques est le même que celui créé par le seul grand (figure de gauche). *On pourra être amené à résoudre une équation du second degré d'inconnue $x = \sqrt{r}$.*

b. Si r est supérieur à ce maximum, établir que l'encombrement créé par les deux disques est :

$$L = R + r + 2\sqrt{Rr}$$

2. Cas de trois disques

a. Trois disques, de centres A, B et C et de rayons p, q et r sont tangents à une même droite et tangents deux à deux, figure ci-contre. L'encombrement est donc égal à celui que les deux disques extérieurs créent à eux seuls. Exprimer le rayon q du disque intérieur en fonction des rayons p et r des disques extérieurs.



b. Dans cette question, les trois disques sont tangents à une même droite, et, de gauche à droite (dans l'ordre de leurs centres), le cercle de centre A est tangent au cercle de centre B, lui-même tangent au cercle de centre C, qui est sans point commun avec le cercle de centre A. Exprimer l'encombrement créé par ces trois disques en fonction de leurs rayons p, q et r.

c. On échange les places des disques de centres B et C et on suppose comme en ***b.*** que le disque central sépare ses deux voisins. Quel est le nouvel encombrement ?

Toujours sous l'hypothèse faite au ***b.***et au **c.**, on suppose de plus que $p \geq q \geq r$. On place les disques dans l'ordre A-B-C, A-C-B ou B-A-C (disposition dans l'ordre décroissant des rayons, ou le plus petit au milieu, ou le plus grand au milieu).

d. Montrer que la disposition A-B-C crée l'encombrement maximum.

e. Montrer que la disposition B-A-C crée l'encombrement minimum si et seulement si $\sqrt{q} - \sqrt{r} \leq \sqrt{p} - \sqrt{q}$.

3. Sept d'un coup

Dans cette question, on dispose de sept disques de rayons 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 (l'unité est le cm).

a. On place le disque de rayon 10 en premier, puis les autres à sa droite, dans l'ordre décroissant des rayons. Compléter le tableau ci-contre (résultats arrondis au centième de mm) et donner un arrondi au mm de l'encombrement obtenu.

Rayon	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**
$\sqrt{r(r+1)}$		9, 487	8, 485	7, 483	6, 481	5, 477	4, 472
Encombrement	20	37,974	53, 944				

b. Proposer un algorithme renvoyant l'encombrement créé par les sept disques placées comme ci-dessus et contrôler le calcul du ***a.***

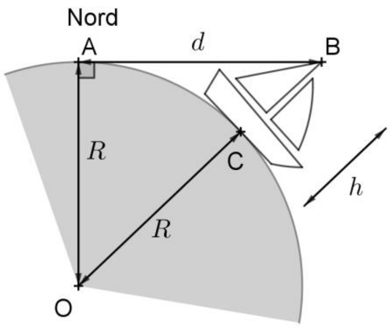
c. Pourquoi cet encombrement est-il maximal pour ces sept disques dans la disposition du ***a*** ? Le comparer à la somme des diamètres des disques.
d. De combien diminue l'encombrement total si, dans la disposition du ***a***, on fait passer le disque de rayon 4 de l'extrême droite à l'extrême gauche ?

4. *a.* Combien y a-t-il de façons différentes de disposer ces sept disques ?
b. Parmi ces dispositions, combien y en a-t-il pour lesquelles le plus grand disque est placé au milieu, de façon qu'il n'y ait jamais trois disques consécutifs de rayons croissants ou de rayons décroissants (disposition en *dents de scie*) ?
c. Combien y a-t-il de dispositions pour lesquelles les rayons forment une suite croissante, ou une suite décroissante, ou alors une suite d'abord croissante puis décroissante ?

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Clairs horizons

A. Calcul du rayon R de la Terre



Un observateur se trouve sur le rivage en A et voit s'éloigner vers le sud un bateau dont on connait la hauteur h émergée (comme sur la figure ci-contre, qui n'est pas à l'échelle). Du fait de la rotondité de la Terre, le bâtiment disparait totalement de l'horizon, une fois éloigné de la côte de la distance $d = AB$ à vol d'oiseau.
On néglige la taille de l'observateur de telle sorte que $OA = R$.
On suppose connue la distance d. On rappelle que la ligne d'horizon (AB) est tangente à la Terre en A.
1. Trouver une relation entre R, d et h.
2. Justifier que $\frac{h}{R}$ est très petit.
3. En déduire que $R \approx \frac{d^2}{2h}$.
4. Application numérique : pour $h = 20$ m et $d = 16$ km, donner une valeur approchée au km près du rayon R de la Terre.
5. En quoi ce raisonnement est-il affecté si le bateau ne s'éloigne pas vers le sud ?

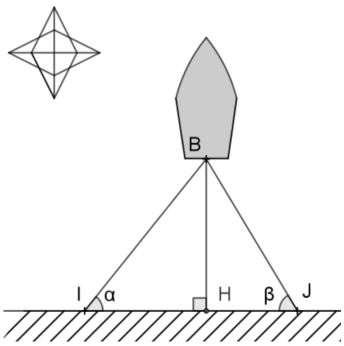
B. Ligne d'horizon

Dans toute cette partie, on convient que $R = 6\,400$ km .

6. On cherche quelle doit être la hauteur h du bateau dans la figure ci-dessus pour que la vigie, située en haut du mat, aperçoive le rivage d'une île située à une distance (en ligne droite) d donnée.
Montrer que cela revient à résoudre, pour d donnée, l'équation d'inconnue h : $(h + R)^2 = d^2 + R^2$

7. Dans le cas où $d = 50$ km, calculer la hauteur h et la longueur de l'arc $\widehat{AC}$.

C. Calcul de la distance d



On mesure en pratique d (dans la partie A, on l'a supposée donnée) par triangulation comme sur le schéma ci-contre (qui n'est pas à l'échelle).
L'écart entre les deux points de repère I et J situés sur la berge (appelés *amers*) est connu et les deux angles α et β sont relevés à l'aide d'instruments de navigation.

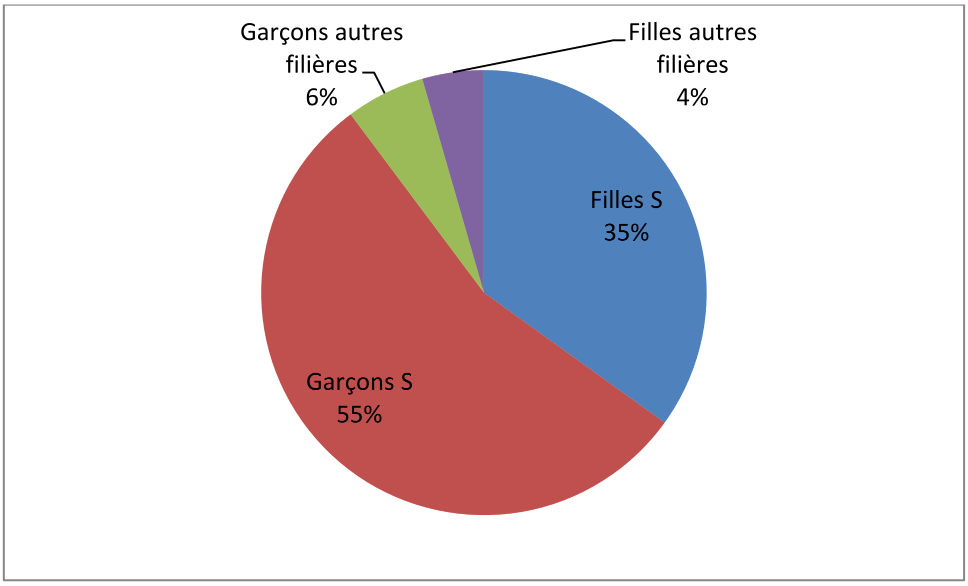
8. Montrer l'égalité suivante : $d = \frac{IJ\ \sin\alpha\ \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.
9. Retrouver la valeur donnée pour d dans la partie A sachant que $IJ = 1$ km, $\alpha = 88°$ et $\beta = 88{,}42°$.

Statistiques édition 2019

Près de 22 000 candidats ont participé cette année (le tableau qui suit est incomplet).
Près de 90% des candidats suivent la voie S, mais le jury national a pu primer de très bonnes copies dans les autres voies. Dans l'académie d'Amiens, une épreuve a été organisée pour les lycéens de première professionnelle, épreuve qui permet l'utilisation de moyens informatiques.

Les jeunes filles représentent les trois huitièmes de l'effectif, entre 39% en S et 44% dans les autres voies.

Plus de la moitié des académies ont opté pour une formule « par équipe » pour la seconde partie de l'épreuve. Les effectifs des équipes pouvant aller de 2 à 4 élèves. Certaines académies ont fait cohabiter la formule par équipe avec la compétition individuelle.



Participation par académie							
ACADEMIE	Voie S	Autres voies	Filles S	Garçons S	Filles autres	Garçons autres	Total
AEFE	1757	272	724	1033	147	125	2029
Aix-Marseille	804	123	343	461	48	75	927
Amiens	323	105	141	182	46	69	438
Besançon	324	26	128	196	7	19	350
Bordeaux	500	531	195	305	15	16	531
Caen	187	3	50	137		3	190
Clermont-Ferrand	246	24	79	167	10	14	270
Corse	162	1	82	80	1	0	163
Créteil	1 068	56	489	579	13	43	1 124
Dijon	337	76	128	209	30	46	413
Grenoble	567	25	224	343	13	12	592
Guadeloupe							
Guyane	114	13	52	62	5	8	127
Lille	688	36	252	436	15	21	724
Limoges	41	9	19	22	6	3	50
Lyon	1 210	79	409	801	36	43	1 289
Martinique	131	24	67	64	14	10	155
Mayotte	130	91	76	54	48	43	221
Montpellier	694	71	270	424	15	56	765
Nancy-Metz	632	69	262	370	12	57	701
Nantes	1 313	142	496	817	66	76	1 455
Nice	536	78	213	323	39	39	614
Nouvelle Calédonie	227	64	120	107	31	33	291
Orléans-Tours	401	46		12	34		
Paris	827	68	292	535	35	33	895
Poitiers	428	55	178	250	26	29	483
Polynésie française	232	17	93	149	6	11	249
Reims	405	50	143	262	31	19	455
Rennes	1 281	175	502	779	70	105	1 456
Réunion							
Rouen	452	27	161	291	10	17	479
Strasbourg	225	40	85	140	24	16	265
Toulouse	1 053	102	373	680	43	59	1 155
Versailles	1 996	188	707	1 289	78	110	2 184
Total général	18890	2140	7353	11547	940	1210	21040

Palmarès national 2019

NOM	Prénom	genre	série	Etablissement	zone
ARVIS	Henri	M	S	Lycée Rochambeau Washington ETATS-UNIS	AEFE AMNORD
BARBU	Stefan	M	S	Lycée international Victor Hugo, 31 Colomiers	TOULOUSE
BOLZAN	Roberto	M	S	Lycée Pierre de Fermat, 31 Toulouse	TOULOUSE
BOZZI	Mateo	M	Tale S	Lycée Saint Exupéry, Santiago CHILI	AEFE AMLASUD
CAEIRO	Elias	M	S	Lycée franco-qatarien Voltaire Doha QATAR	AEFE MOPI
CALVET	Christophe	M	S	Lycée Saint Jean Hulst 78 Versailles	VERSAILLES
CARLIER	Sophie	F	S	Lycée Franco-allemand 78 Buc	VERSAILLES
CA'ZORZI	Aurélia	F	L	Lycée International 78 Saint Germain en Laye	VERSAILLES
CHADOURNE	Simon	M	STI2D	Lycée Gustave Eiffel, 33 Bordeaux	BORDEAUX
DEFLINE	Eloi	M	S	Lycée français de Hong Kong CHINE	AEFE ASIE PACIFIQUE
DEVIE	Félicien	M	L	Lycée Notre-Dame, 85 Challans	NANTES
DILLIES	Yael	M	S	Lycée Notre Dame de toutes aides, 44 Nantes	NANTES
DJANBAZ	Mostafa	M	S	Lycée Jean Paul Sartre, 69 Bron	LYON
FANTON	Benoit	M	S	Lycée Louis Le Grand, 75 Paris	PARIS
FERNANDEZ	Kilian	M	STI2D	Lycée Jules Fil, 11 Carcassonne	MONTPELLIER
FERNANDEZ	Tomas	M	Tale S	Lycée Saint Exupéry, Santiago CHILI	AEFE AMLASUD
FRADIN	Adrien	M	S	Lycée Marguerite de Valois, 16 Angoulême	POITIERS
HADDAD	Eliott	M	S	Lycée français de New York ETATS-UNIS	AEFE AMNORD
KAMEL	Sami	M	S	Lycée Français San Francisco ETATS-UNIS	AEFE AMNORD
KHENG	Augustin	M	S	Lycée Fénelon, 63 Clermont-Ferrand	CLERMONT-FERRAND
KWIATKOWSKI	Olaf	M	S	Lycée Guillaume Apollinaire, 94 Thiais	CRETEIL
LE CORRE	Gregoire	M	S	Lycée Chaptal, 75 Paris	PARIS
LECUIT	Augustin	M	S	Lycée Rochambeau Washington ETATS-UNIS	AEFE AMNORD
LIU	Charles	M	S	Lycée International 78 Saint Germain en Laye	VERSAILLES
LORENZO	Claire	F	S	Collège International Marie de France Montréal CANADA	AEFE AMNORD
LOUIS	Paul-Philipp	M	S	Lycée Privé de Marq, 59 Marq en Baroeul	LILLE
LUCHNIKOVA	Anna	F	S	Lycée franco-allemand, Freiburg ALLEMAGNE	AEFE ZECO
MUSINA	Karina	F	Tale S	Lycée Lapérouse Nouméa	NOUVELLE CALEDONIE
PIERROT	Ulysse	M	S	Lycée Rosa Parks, 85 La Roche sur Yon	NANTES
REY	Adrien	M	S	Lycée Maintenon, 83 Hyères	NICE
ROGALSKI	Youri	M	Tale S	Lycée Saint Exupéry, Santiago CHILI	AEFE AMLASUD
ROUSSEAU	Thibault	M	ES	Lycée Saint Jean Hulst 78 Versailles	VERSAILLES
ROZGONYI	Gergely	M	S	Lycée Saint Marc, 38 Nivolas-Vermelle	GRENOBLE
SALIOU	Domitille	F	S	Lycée Louis Le Grand, 75 Paris	PARIS
SCHULER	Lola	F	L	Lycée Bernard Palissy, 47 Agen	BORDEAUX
STUCKLE	Paul	M	S	Lycée St Louis de Gonzague, 75 Paris	PARIS
TIRDAD	Ayoub	M	S	Lycée Camille Saint Saëns 95 Deuil la Barre	VERSAILLES
VEERSTEEG	Rodric	M	ES	Lycée Edgard Quinet, 01 Bourg en Bresse	LYON
ZAROUR	Yaman	M	S	Collège Stanislas Montréal CANADA	AEFE AMNORD
ZHENG	Emilie	F	S	Lycée Louis Le Grand, 75 Paris	PARIS

Avec le soutien de

Contact presse 01 55 55 30 10

spresse@education.gouv.fr

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE