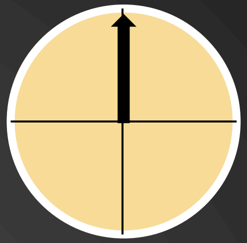
PROBABILITÉS




Univers associé à une expérience aléatoire : c'est la liste des issues.	Exemple d'expérience aléatoire : lancer un dé. Issues possibles : 1; 2; … . Univers : $\boldsymbol{\Omega} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Evénement : une partie de l'univers	Exemple d'événement: $\boldsymbol{A}$:« obtenir un résultat pair » ou bien $\boldsymbol{A} = \{2; 4; 6\}$
Evénement contraire On note $\bar{A}$ l'événement contraire de l'événement A. $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$ On note P une loi de probabilité sur l'univers Ω . Equiprobabilité	Événement contraire de A $\bar{A}$: » obtenir un résultat impair » ou bien $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$ $P(A) = 1/2$

QUESTION 1

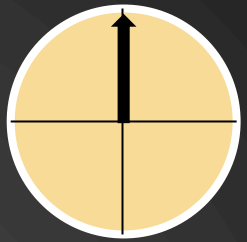


Le tableau suivant donne la répartition des 150 stagiaires d'un séjour linguistique selon la langue étudiée et le sport choisi.

	Tennis	Équitation	Voile	Total
Anglais	45	18	27	90
Espagnol	33	9	18	60
Total	78	27	45	150

On tire au hasard un dossier. Quelle est la probabilité que le dossier choisi soit celui d'un stagiaire faisant de l'espagnol et du tennis?

QUESTION 2

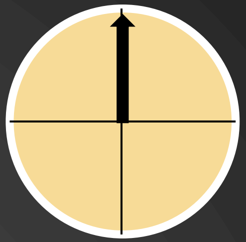


Le tableau suivant donne la répartition des 150 stagiaires d'un séjour linguistique selon la langue étudiée et le sport choisi.

	Tennis	Équitation	Voile	Total
Anglais	45	18	27	90
Espagnol	33	9	18	60
Total	78	27	45	150

On tire au hasard un dossier parmi les dossiers des stagiaires ayant choisi « Espagnol ». Quelle est la probabilité que le dossier choisi soit celui d'un stagiaire faisant du tennis?

QUESTION 3



Une urne contient des boules rouges et des boules bleues.

48% sont des boules rouges et parmi ces boules rouges,

$\frac{1}{4}$ sont marquées d'un +.

On tire au hasard une boule dans l'urne. On note :

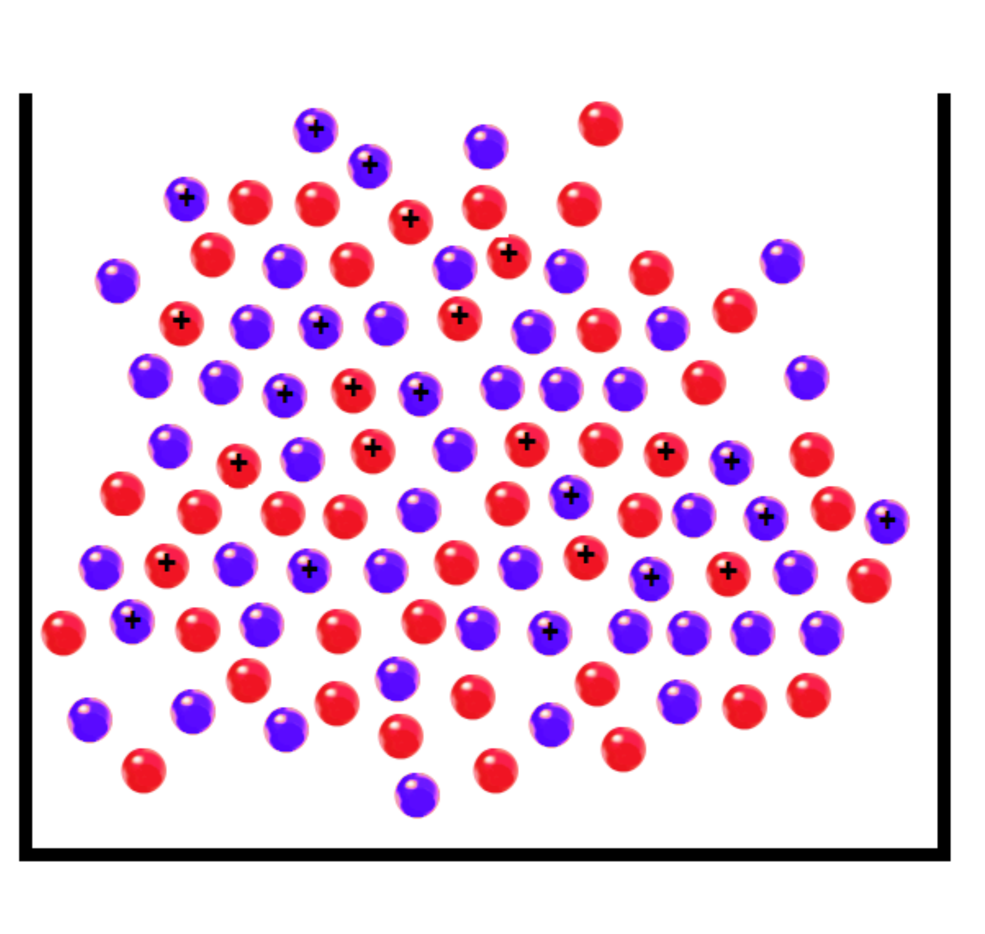
R l'événement « la boule est rouge » ;

M l'événement « la boule a une marque + ».

Compléter en utilisant les notations des probabilités :

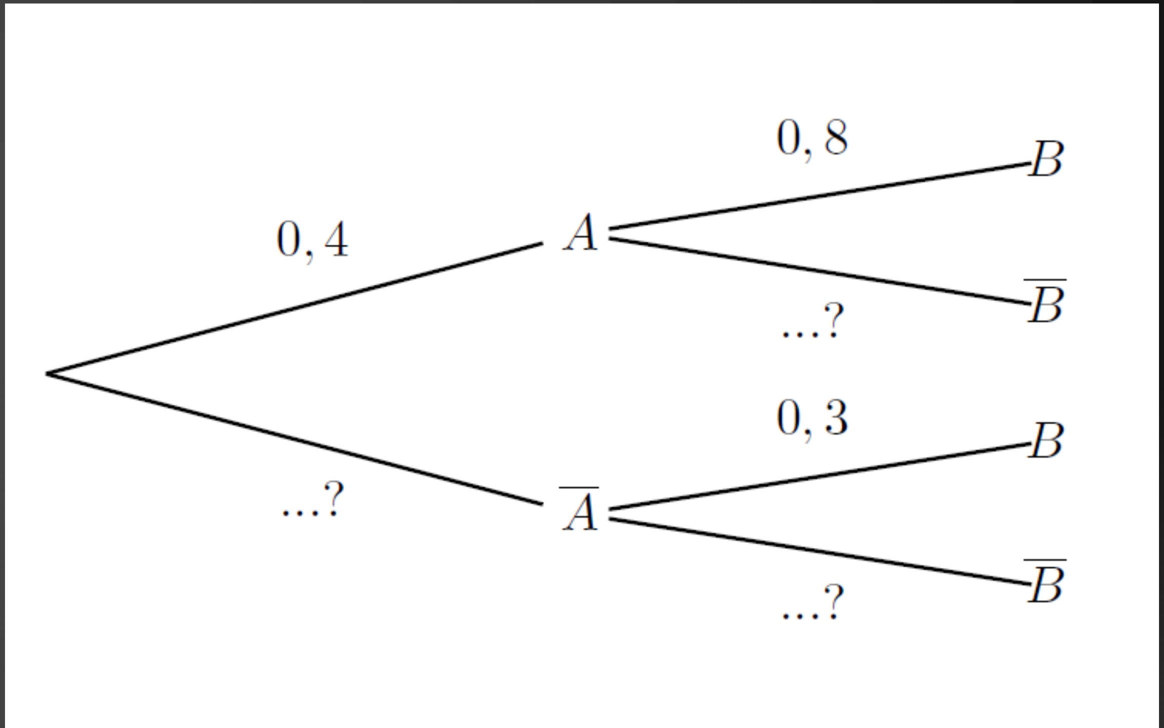
…= 0,48

…=0,25



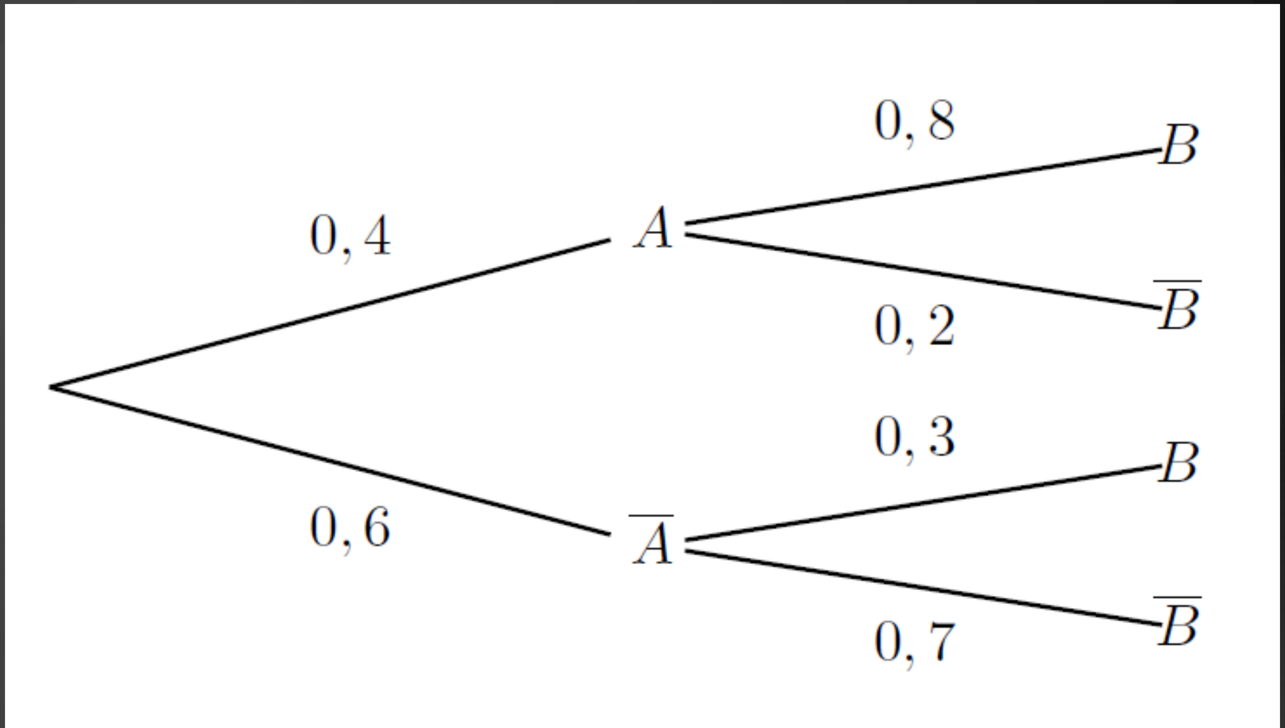
QUESTION 4

Compléter les probabilités manquantes sur l'arbre ci-contre.

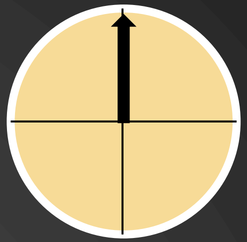


QUESTION 5

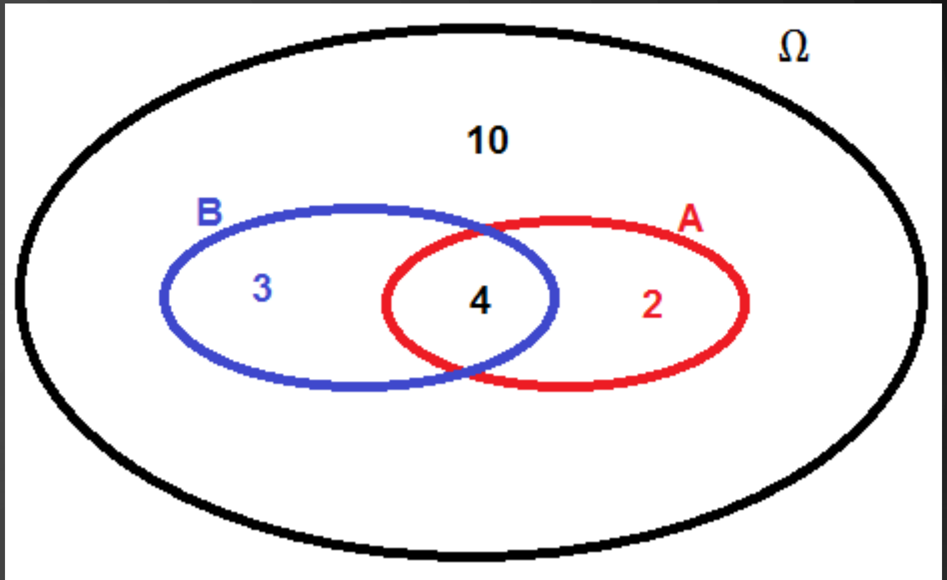
Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$.



QUESTION 6



A et B sont deux événements
d'un univers Ω.
On indique le nombre d'éléments dans
chaque partie représentée .
On choisit au hasard un élément de
l'univers Ω.



Calculer $P_A(B)$.

CORRECTION

QUESTION 1

Le tableau suivant donne la répartition des 150 stagiaires d'un séjour linguistique selon la langue étudiée et le sport choisi.

	Tennis	Équitation	Voile	Total
Anglais	45	18	27	90
Espagnol	33	9	18	60
Total	78	27	45	150

On tire au hasard un dossier . Quelle est la probabilité que le dossier choisi soit celui d'un stagiaire faisant de l'espagnol et du tennis?

QUESTION 2

Le tableau suivant donne la répartition des 150 stagiaires d'un séjour linguistique selon la langue étudiée et le sport choisi.

	Tennis	Équitation	Voile	Total
Anglais	45	18	27	90
Espagnol	33	9	18	60
Total	78	27	45	150

On tire au hasard un dossier parmi les dossiers des stagiaires ayant choisi « Espagnol ». Quelle est la probabilité que le dossier choisi soit celui d'un stagiaire faisant du tennis?

QUESTION 3

48% sont des boules rouges et parmi ces boules rouges, $\frac{1}{4}$ sont marquées d'un +.

On tire au hasard une boule dans l'urne. On note :

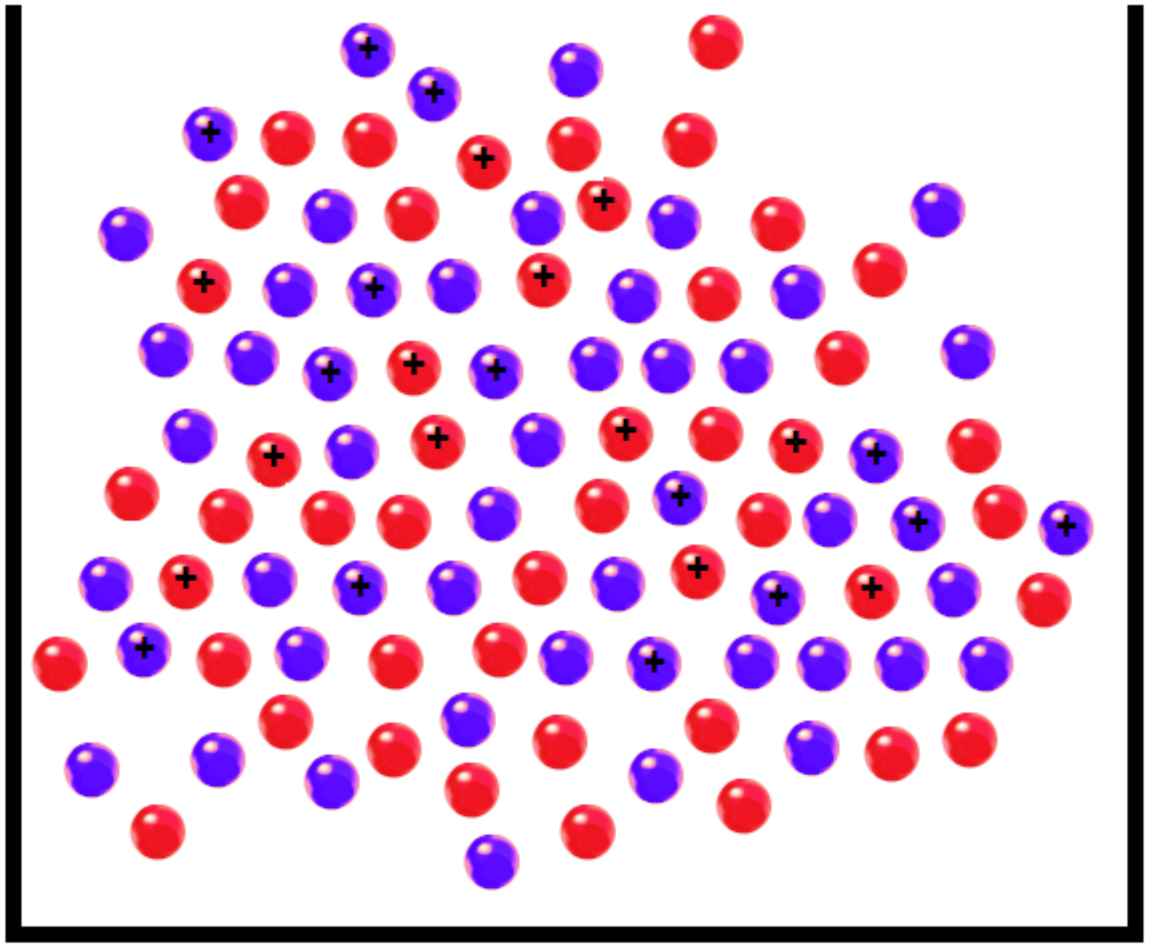
R l'événement « la boule est rouge » ;

M l'événement « la boule a une marque + »

Compléter en utilisant les notations des probabilités :

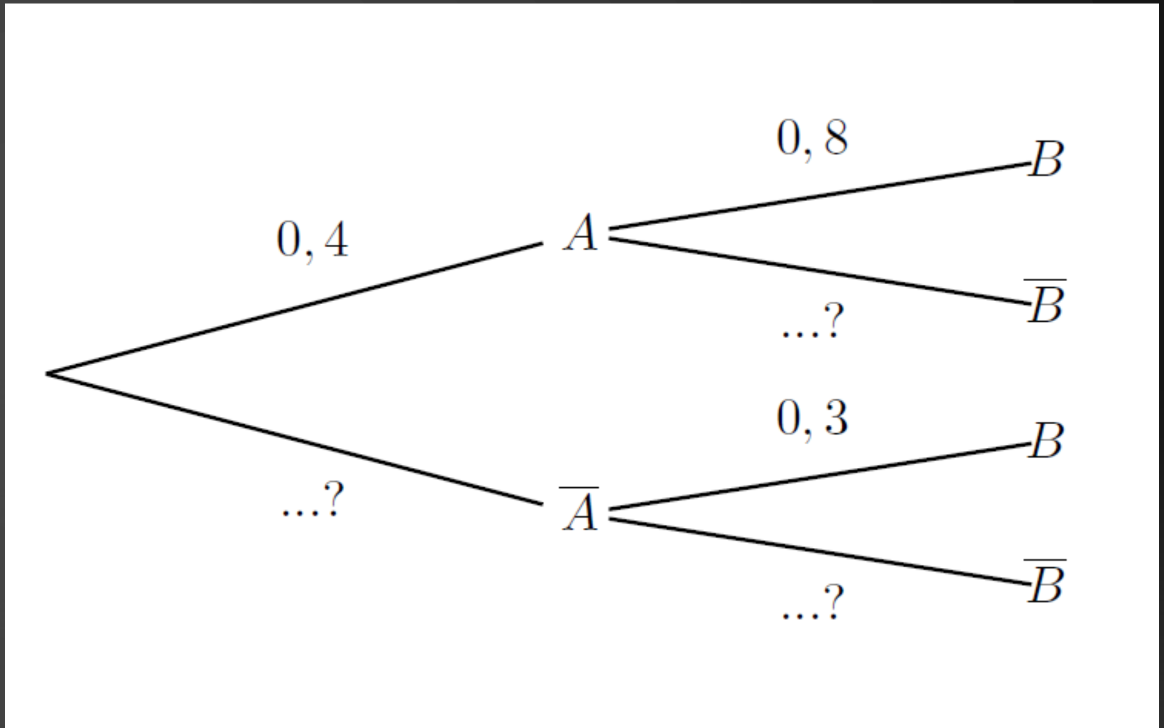
…= 0,48

…=0,25



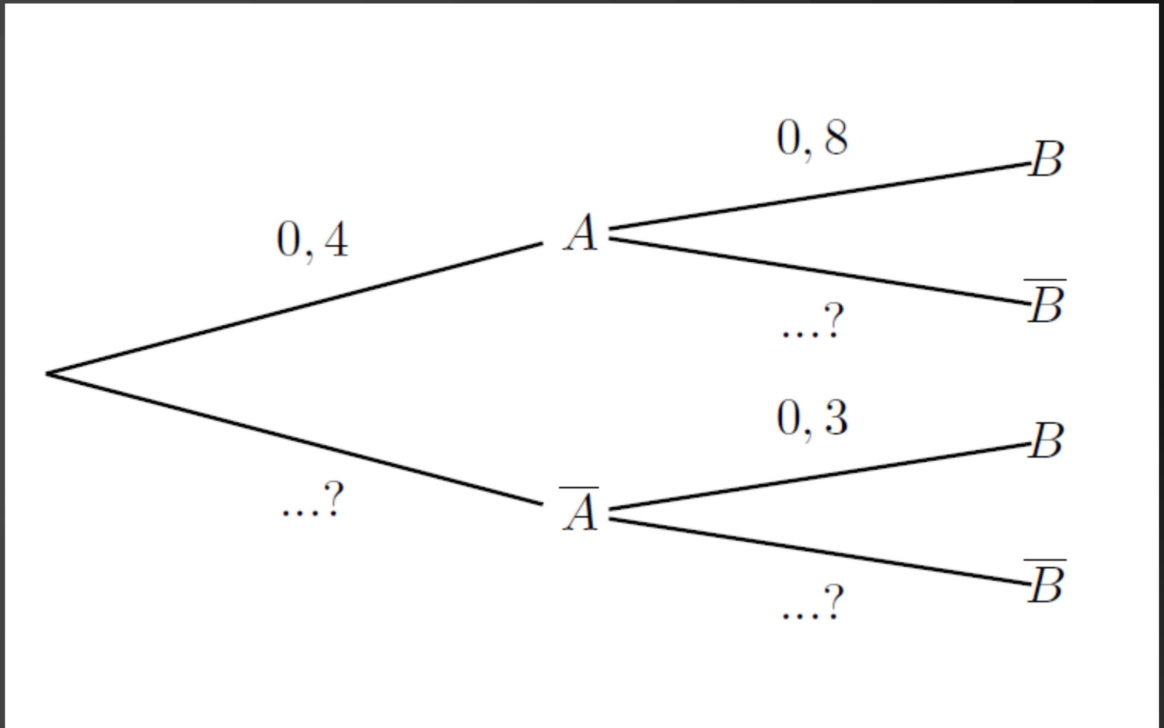
QUESTION 4

Compléter les probabilités manquantes sur l'arbre ci-contre.



QUESTION 5

Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$.



QUESTION 6

A et B sont deux événements

d'un univers Ω.

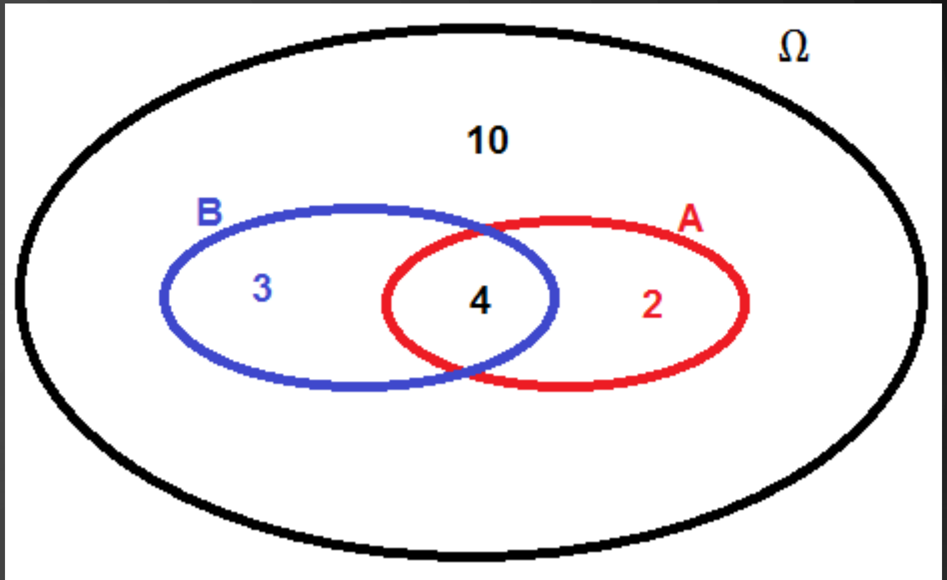
On indique le nombre d'éléments dans

chaque partie représentée .

On choisit au hasard un élément de

l'univers Ω.

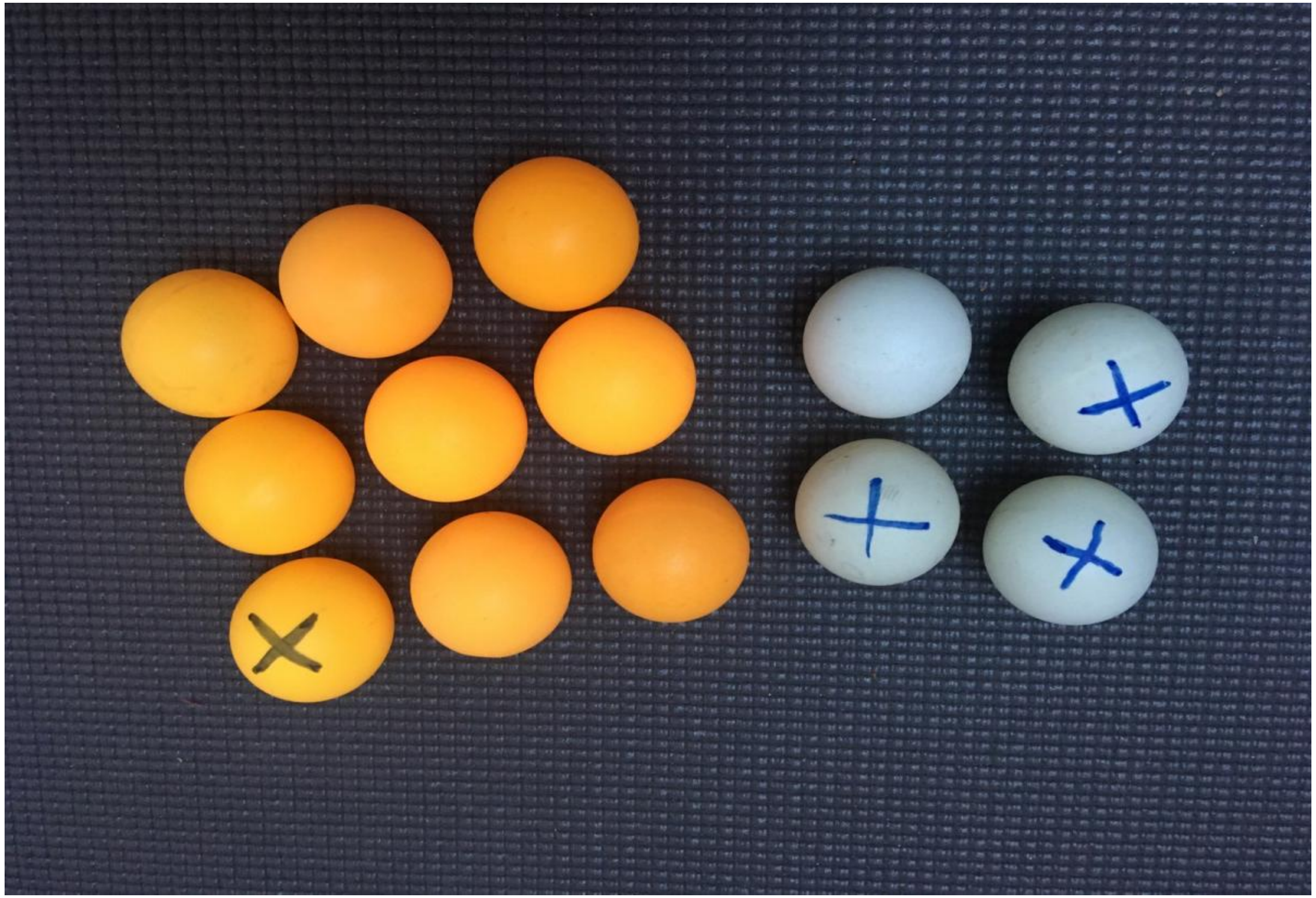
Calculer $P_A(B)$.



Calculer une probabilité conditionnelle

9 balles oranges, dont 1 marquée **+**

4 balles blanches, dont 3 marquées **+**

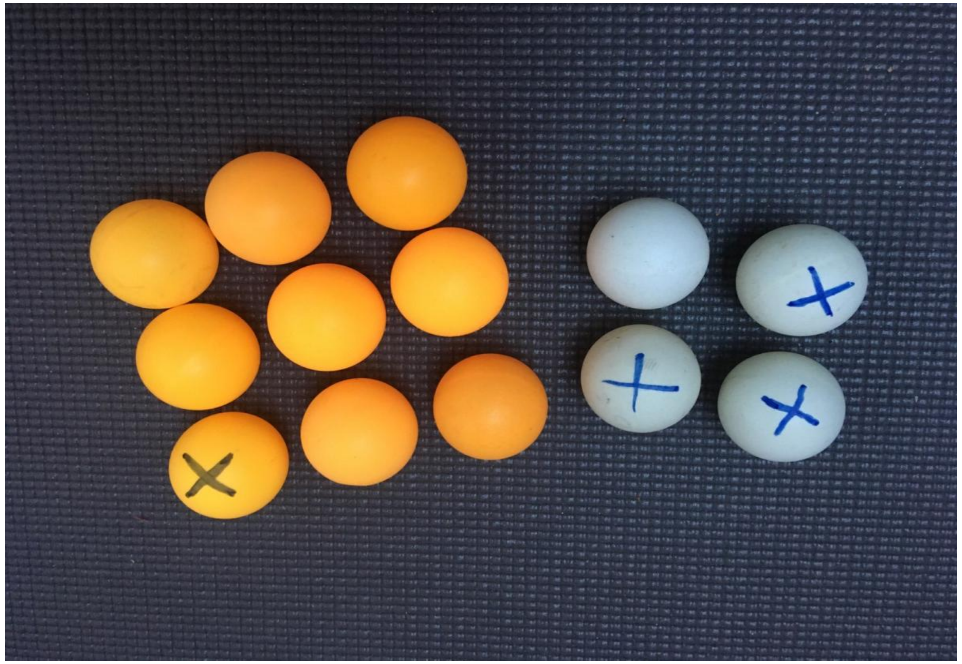


Calculer une probabilité conditionnelle

Je tire au hasard une balle dans mon sac.

On note M l'événement « la balle tirée est marquée d'un $\boldsymbol{+}$ » et S l'événement « la balle tirée est orange ».

Quelle est la probabilité que la balle tirée soit marqué d'un $\boldsymbol{+}$?



Calculer une probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements de Ω avec $P(B) \neq 0$.

$P_B(A)$ est la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

En situation d'équiprobabilité, $P_B(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } B}$.

Calculer une probabilité conditionnelle.

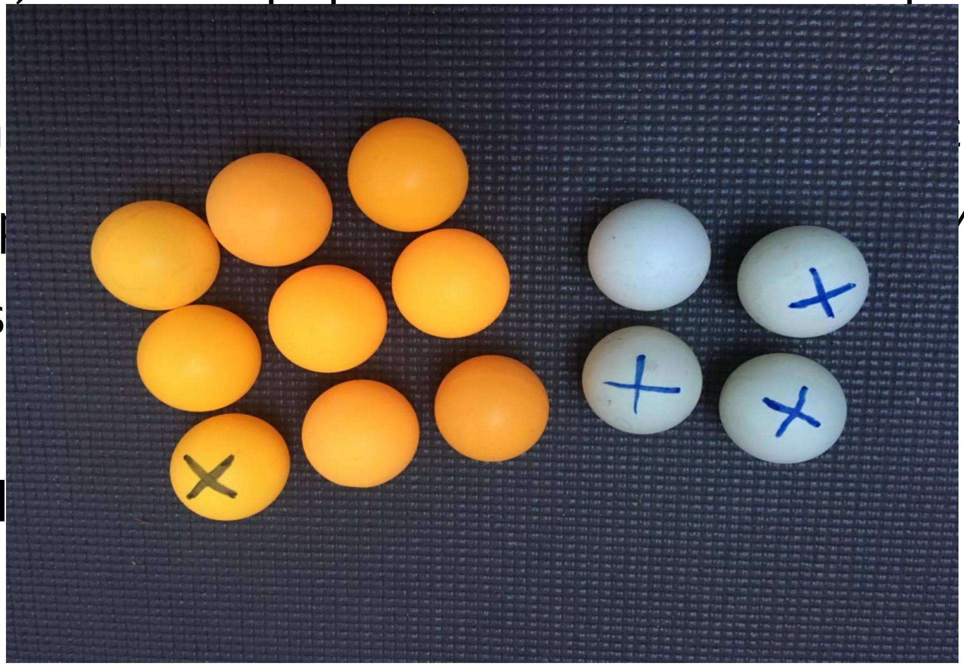
Soient A et B deux événements de Ω avec $P(B) \neq 0$.

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ équivaut à $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$

Calculer une probabilité: arbre et/ou la formule des probabilités totales

Une personne vient de passer un test de dépistage d'une maladie rare

qui ne touche que 0,1 % de la population. Des tests cliniques ont permis de constater que :



- si le patient est m … as.
- si le patient n'est … % des cas.

On choisit une pers

On note:

M l'événement : « l

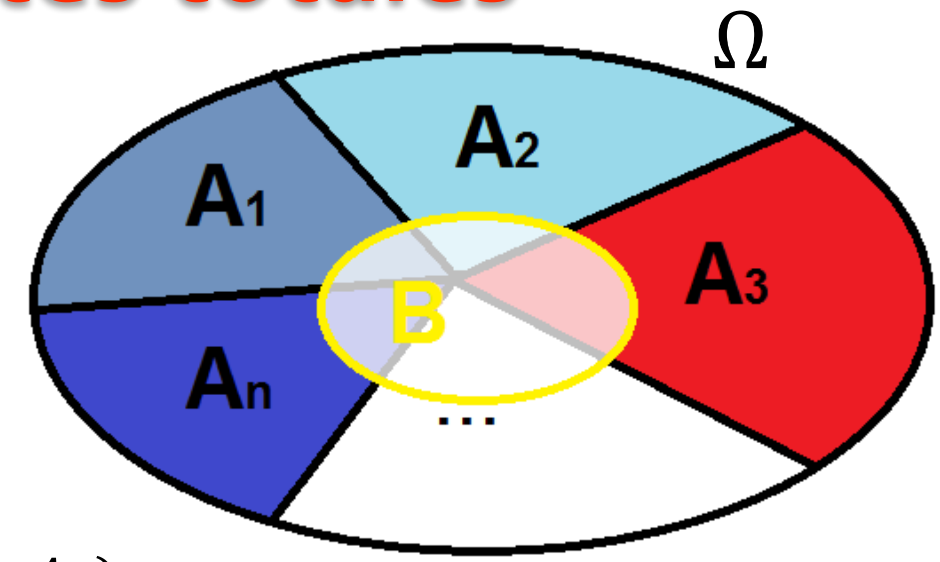
T l'événement « le

Calculer une probabilité: arbre et/ou la formule des probabilités totales

Quelle est la probabilité qu'un patient soit malade et ait un test positif ?

Quelle est la probabilité qu'un patient ait un test positif ?

Calculer une probabilité: arbre et/ou la formule des probabilités totales



Partition de Ω

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots . + P(B \cap A_n)$

$P(B) = P(A_1).P_{A_1}(B) + P(A_2).P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n).P_{A_n}(B)$

Calculer une probabilité: arbre et/ou la formule des probabilités totales

Ce qui nous intéresse en réalité, c'est de répondre à la question suivante :

Quelle est la probabilité, pour un patient dont le test est positif, d'être effectivement malade ?

Étudier l'indépendance de deux événements.

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.

Deux événements sont **indépendants** lorsque la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre.

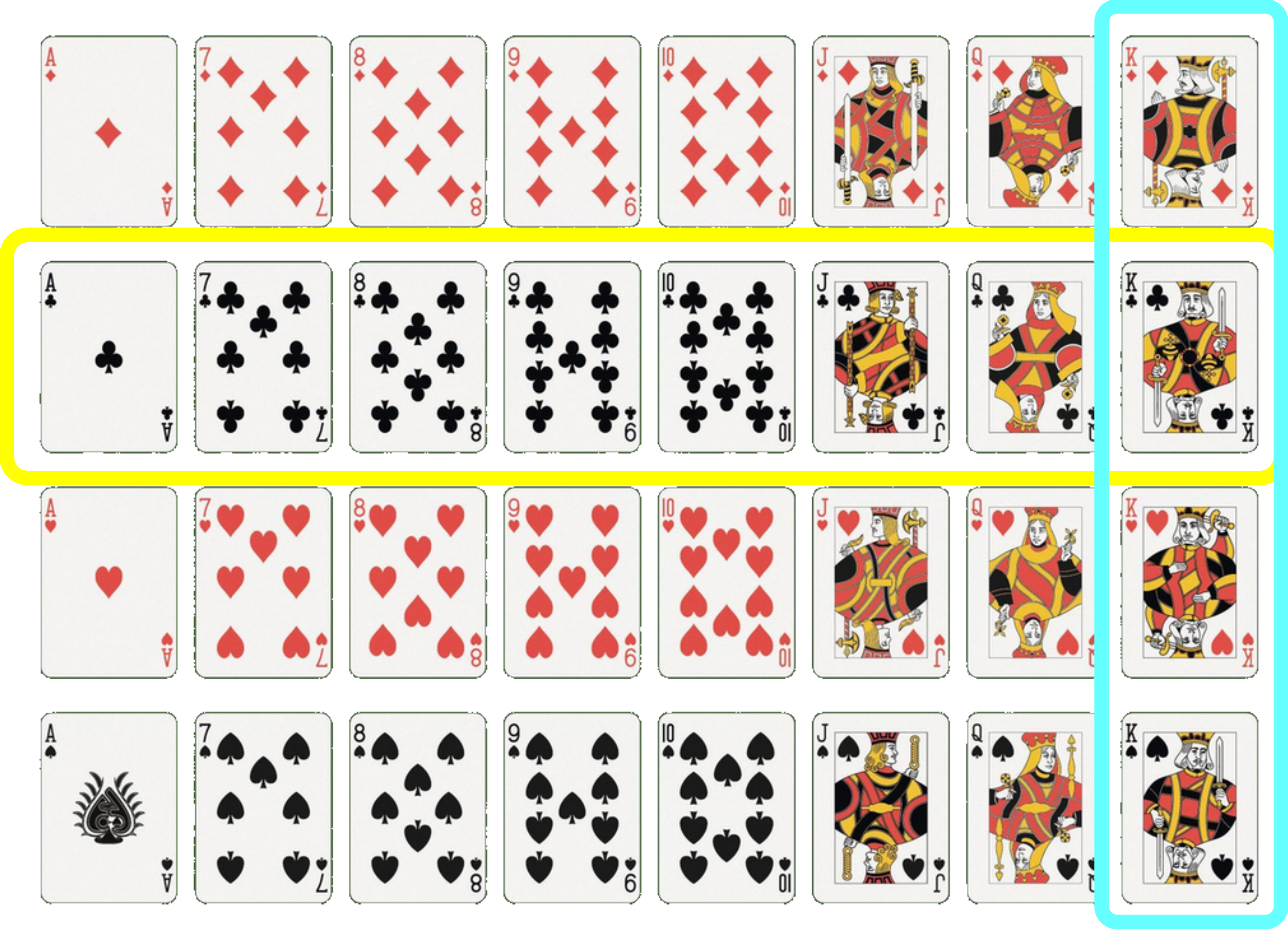
$$P_B(A) = P(A) \text{ et } P_A(B) = P(B)$$

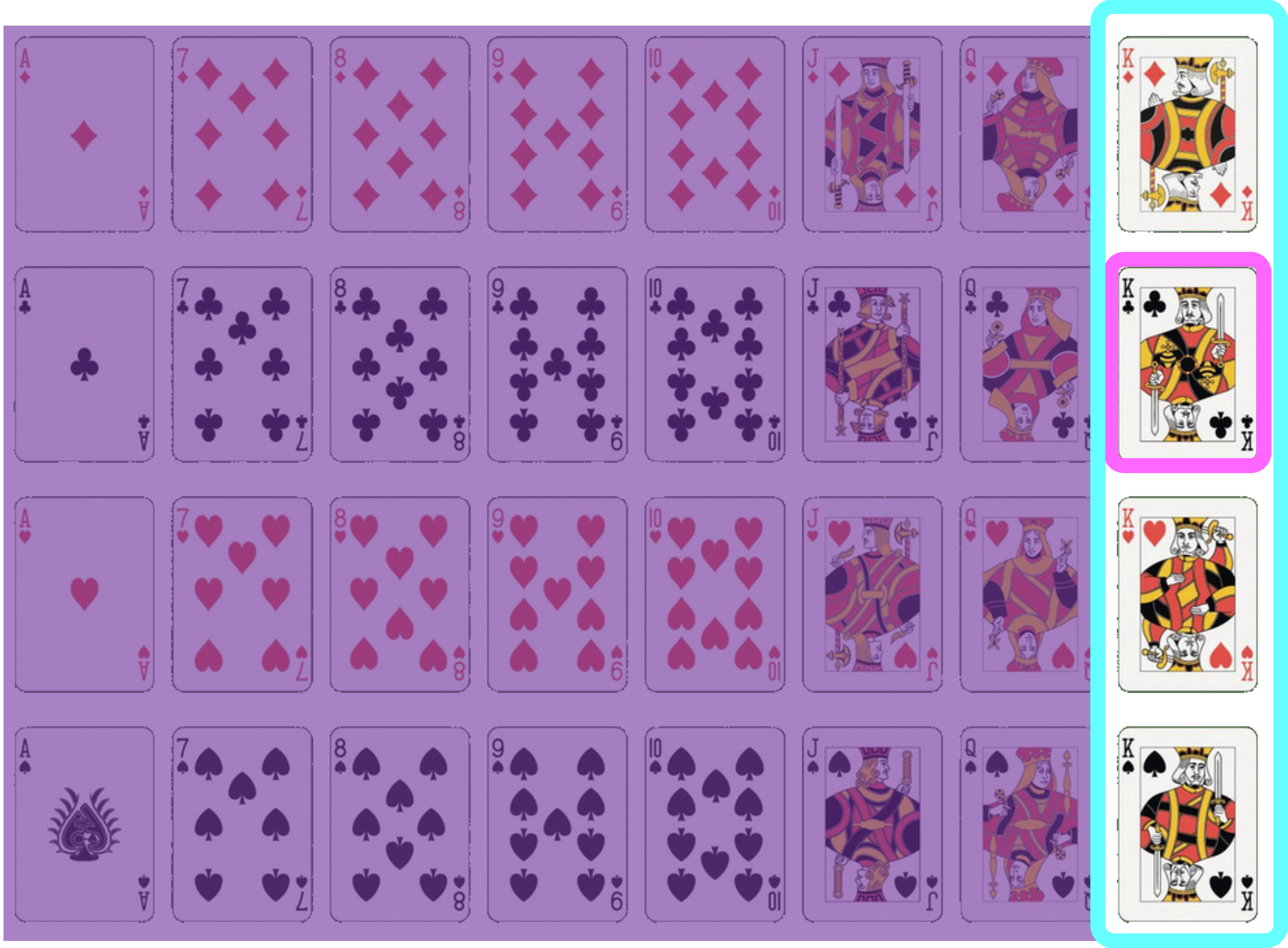
Ce qui est équivalent à

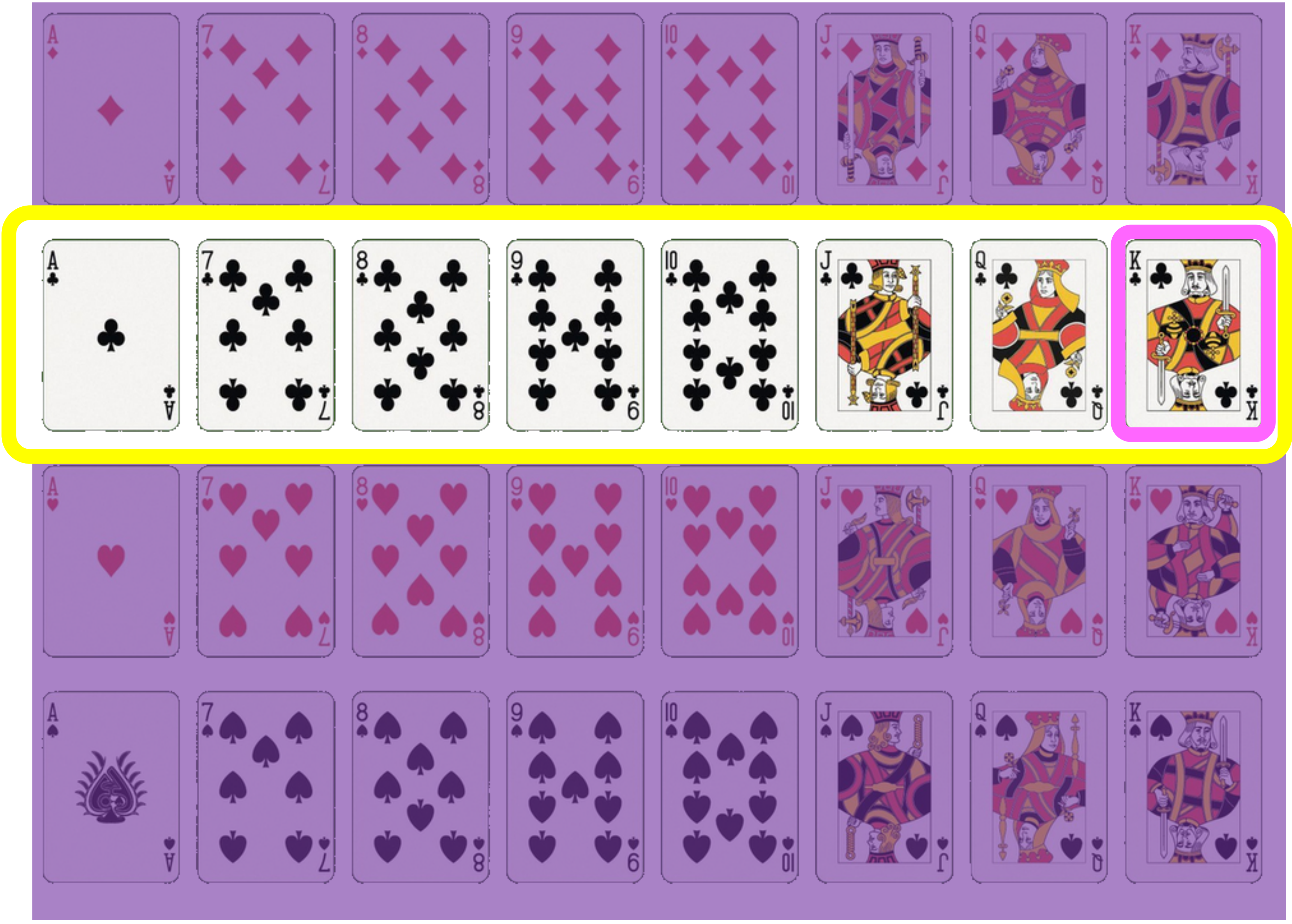
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

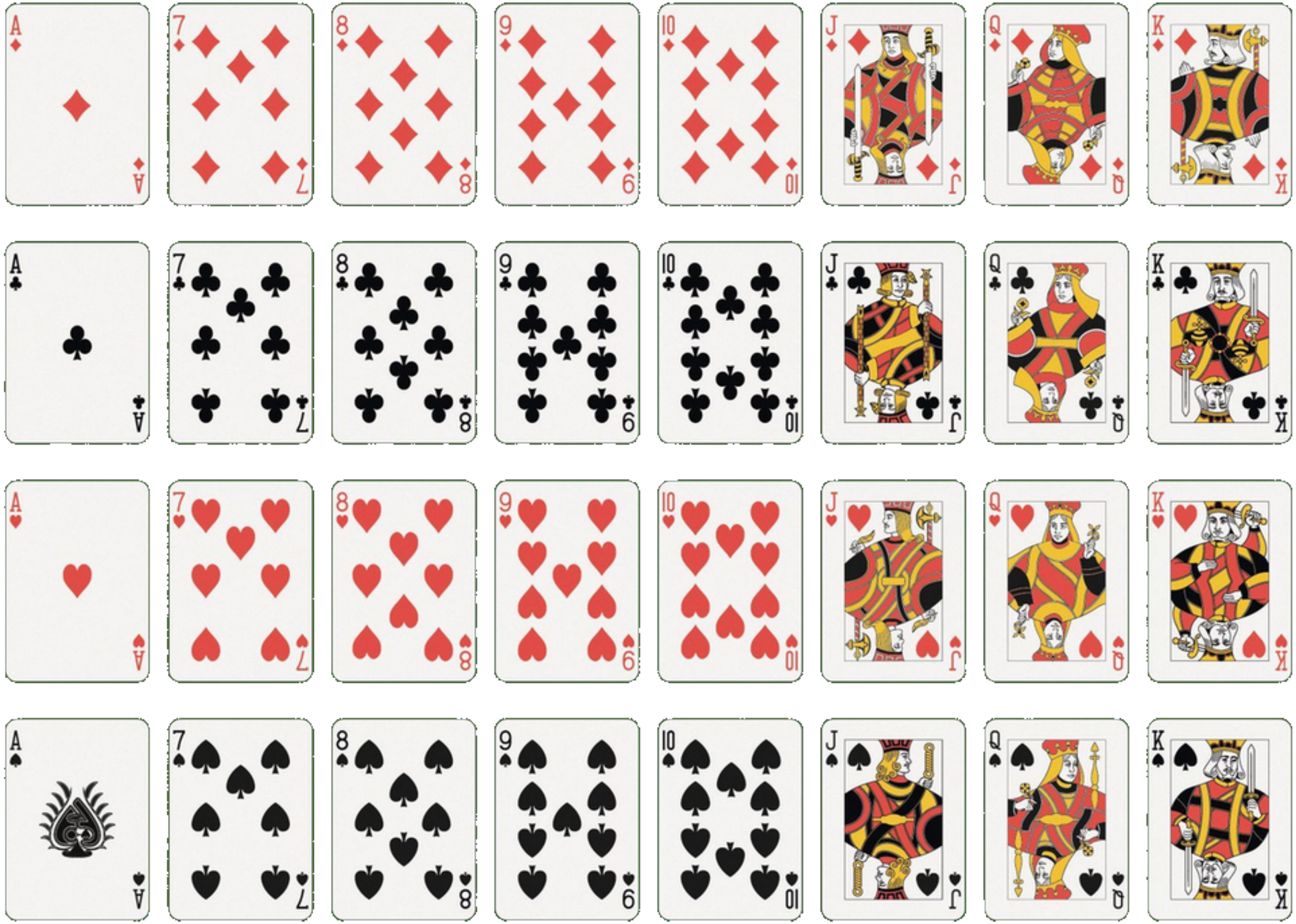
Ce qui est aussi équivalent à $P_B(A) = P(A)$

Ce qui est aussi équivalent à $P_A(B) = P(B)$



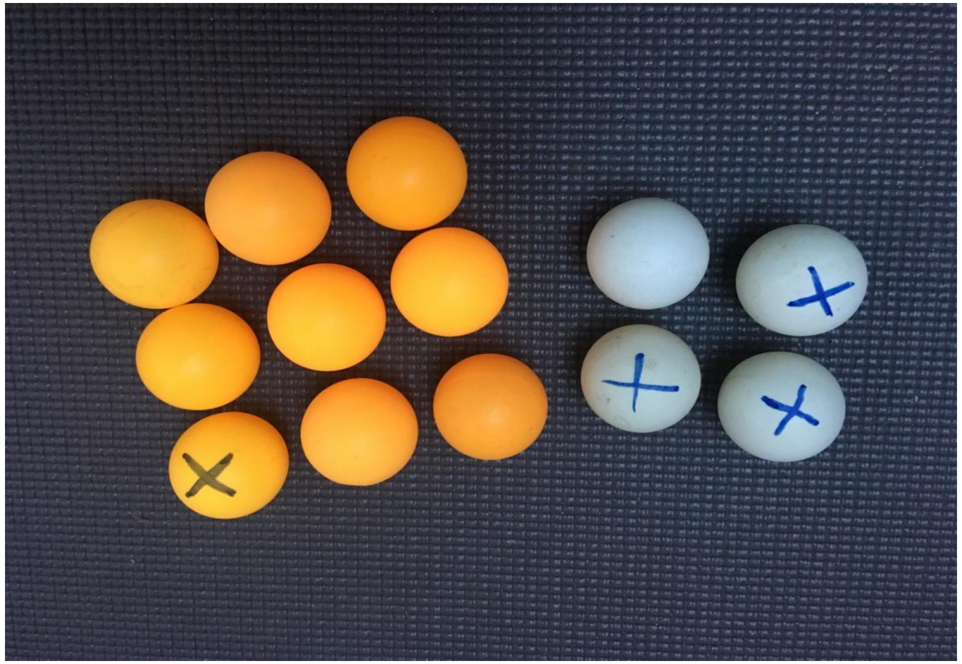


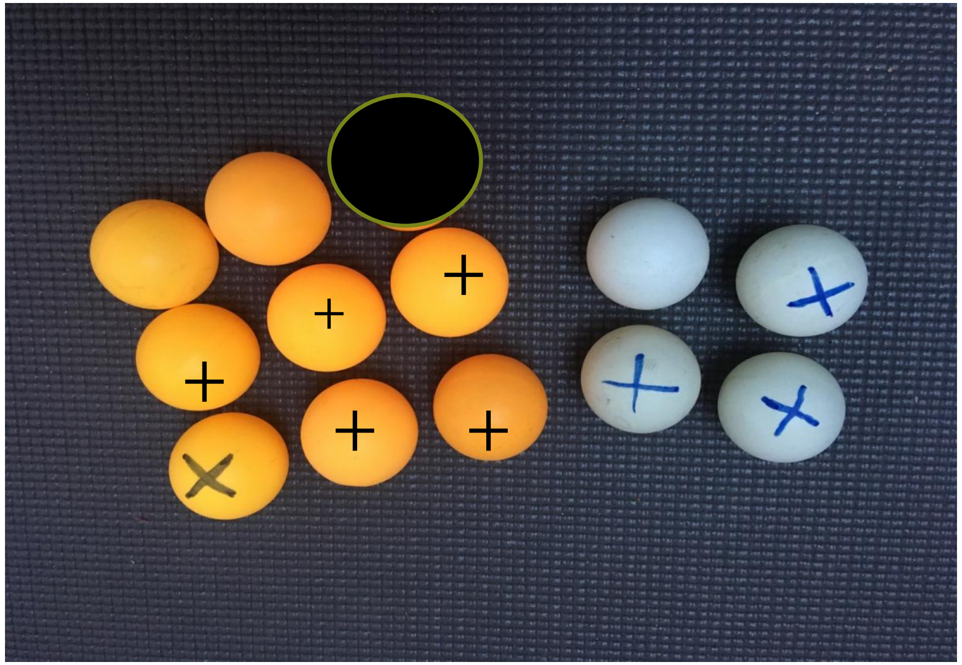




Étudier l'indépendance de deux événements.
Exemple de S « la balle tirée est orange » et M « la balle tirée est marquée + ».

Modifions la répartition des couleurs et des marques dans notre urne.





LE VRAI-FAUX

Affirmation 1

Une bibliothèque propose, dans son catalogue, des livres écrits en français et d'autres en anglais.
70% des livres sont des romans.
90 % des romans sont écrits en français.
Parmi les livres qui ne sont pas des romans, la moitié sont en anglais.

On tire au hasard un livre dans le catalogue des livres écrits en français.
Affirmation 1:
« Il y a plus de 3 chances sur 4 que le livre choisi soit un roman ».

70% des livres sont des romans.
$90~\%$ des romans sont écrits en français.
Parmi les livres qui ne sont pas des romans, la moitié sont en anglais.
On tire au hasard un livre dans le catalogue des livres écrits en français.
Affirmation 1: « Il y a plus de 3 chances sur 4 que le livre choisi soit un roman ».

<u>Notations:</u>
R est l’événement « le livre choisi est un roman » ;
F est l’événement « le livre choisi est en français » ;
A est l’événement « le livre choisi est en anglais » .

Affirmation 2

Une entreprise reçoit 60% de spams dans ses messages.

Un logiciel anti-spam est installé dans cette entreprise. Ce logiciel détecte les messages indésirables appelés spams et les déplace dans un fichier appelé Indésirable.

Le concepteur du logiciel affirme que 95 % des spams sont déplacés.

Après installation du logiciel, l'entrepreneur constate que 66 % des messages sont déplacés dans le dossier indésirable.

Affirmation 2 :

« La probabilité qu'un message déplacé ne soit pas un spam est 1/8. »

Une entreprise reçoit 60% de spams dans ses messages.
Le concepteur du logiciel affirme que $95\ \%$ des spams sont déplacés.
Après installation du logiciel, l'entrepreneur constate que $66\ \%$ des messages sont déplacés dans le dossier indésirable.
Affirmation 2 : « La probabilité qu'un message déplacé soit un spam est $0{,}85$. »

On tire au hasard un message .

Notations:

S est l'événement « le message est un spam » ;

I est l'événement « le message a été déplacé dans le fichier Indésirable».

Affirmation 3

Monsieur et madame Marcus vont acheter du pain. Ils doivent payer 1,10 €.

Madame Marcus a dans son porte-monnaie une pièce d'1 euro et deux pièces de 50 centimes.

Monsieur Marcus a dans son porte-monnaie trois pièces de 1 euro et une pièce de 50 centimes.

Ils sortent en même temps et de manière indépendante une pièce choisie au hasard de leur porte-monnaie respectif.

Affirmation 4 :

« La probabilité de pouvoir payer le pain avec les deux pièces sorties est de 5/6. »

Payer $1{,}10$ €.
Madame Marcus une pièce d'1 euro et deux pièces de 50 centimes.
Monsieur Marcus trois pièces de 1 euro et une pièce de 50 centimes.
Affirmation 3 : « La probabilité de pouvoir payer le pain avec les deux pièces sorties est de $5/6$. »

- S_1 est l'événement « madame Marcus tire une pièce de 50 centimes » ;
- S_2 est l'événement « monsieur Marcus tire une pièce de 50 centimes ».
- Les événements sont indépendants.

Affirmation 4 (défi)

J’ai trois clés que je ne parviens pas à distinguer. L’une d’elle permet d’ouvrir la porte d’entrée.

J’essaie une première clé. Si elle n’ouvre pas la porte, je la mets de côté et j’essaie une autre clé. Si cette deuxième clé n’ouvre pas la porte, j’essaie la dernière.

- **Affirmation 4** :

« La probabilité de trouver la bonne clé au deuxième essai est supérieure à la probabilité de trouver la bonne clé au premier essai. »