THÈME 3
SOUS-THÈME 3-4 : MODÈLES DÉMOGRAPHIQUES

Mots-clés

Variation absolue ; variation relative ; taux de variation ; suite géométrique ; suite arithmétique ; modèle linéaire ; modèle exponentiel.

Références au programme

Dans le cadre de l'étude de l'évolution des populations, il est important de prédire leur effectif futur mais aussi la manière dont vont évoluer les ressources qui leur sont nécessaires.
Pour prédire l'évolution d'un système quelconque, les scientifiques utilisent des modèles mathématiques. La présentation de l'exemple historique de Malthus permet de mettre en œuvre cette démarche mathématique dans le cas discret (correspondant à une variation par paliers).

Savoirs

Un modèle mathématique simple est le modèle linéaire.

Une grandeur discrète u varie de manière linéaire en fonction d'un palier entier n si sa variation absolue $u(n+1)-u(n)$ est constante. Dans ce cas, les points $(n, u(n))$ sont situés sur une droite affine.

Dans la réalité, pour une population dont la variation absolue est presque constante d'un palier à l'autre, on peut ajuster le nuage de points qui la représente par une droite (modèle linéaire).

Le modèle linéaire est inadapté pour représenter l'évolution d'une grandeur dont la variation absolue varie fortement d'un palier à l'autre.

Une grandeur discrète u varie de manière exponentielle en fonction du palier entier n si sa variation absolue est proportionnelle à sa valeur courante. Dans ce cas, sa variation relative (ou taux de variation) est constante.

Dans la réalité, pour une population dont le taux de variation est presque constant d'un palier à l'autre, on peut ajuster le nuage de points par un modèle exponentiel.

Le modèle démographique de Malthus est un modèle exponentiel d'évolution de l'effectif de la population. Il prévoit que l'effectif de la population décroît vers 0 si le taux de mortalité est supérieur au taux denatalité et croît vers l'infini si le taux de natalité est supérieur au taux demortalité.

Si les prédictions du modèle de Malthus peuvent se révéler correctes sur un temps court, elles sont irréalistes sur un temps long, notamment en raison de l'insuffisance des ressources disponibles.

Des modèles plus élaborés prévoient que la population mondiale atteindra environ 10 milliards d'humains en 2050.

Savoir-faire

Pour une suite arithmétique (modèle linéaire), exprimer $u(n)$ en fonction de $u(0)$ et n.

Produire et interpréter des graphiques statistiques traduisant l'évolution d'effectif d'une population ou de ressources, notamment sous forme de nuages de points.

À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, ajuster un nuage de points par une droite et utiliser ce modèle linéaire pour effectuer des prévisions.

Pour une suite géométrique (modèle exponentiel), exprimer $u(n)$ en fonction de $u(0)$ et de n.

À partir de données démographiques, calculer le taux de variation d'une population entre deux dates.
Calculerl'effectiffinald'unepopulationàpartirdesoneffectifinitial,desontauxdenatalitéetdesontauxde mortalité. Selon le modèle de Malthus, prédire l'effectif d'une population au bout de $n$années.
À l'aide d'un tableur, d'une calculatrice ou d'une représentation graphique, calculer le temps de doublement d'une population sous l'hypothèse de croissance exponentielle.

À partir de documents fournis, proposer un modèle de croissance de ressources alimentaires (par exemple la production mondiale de blé ou de riz) et la comparer à une croissance exponentielle.

Comparer les valeurs fournies par un modèle à des données réelles afin de tester sa validité.

Notions mathématiques mobilisées

- Information chiffrée et statistique descriptive du programme de mathématiques de cycle 4 et de seconde : effectifs, fréquences, proportions, pourcentages, coefficient deproportionnalité, variation absolue, variation relative, taux d'évolution, coefficientmultiplicateur.
- Les fonctions affines et leurs représentations graphiques (droites).
- Fonction de variable entière (suite) ; notations fonctionnelle $u(n)$ ou indicielle u_n.

Histoire, enjeux et débats

Thomas Malthus est né en 1766 d'une famille britannique aisée. Il devient pasteur anglican en 1797. En 1798 il publie son *Essai sur le principe de population* qui connaît un immense succès. Thomas Malthus a identifié le déséquilibre entre la croissance de la population et celle des subsistances. Il a tenté de résoudre le problème en proposant d'agir soit sur la croissance démographique en la réduisant, soit sur la quantité de denrées alimentaires sur la planète. Son essai a déclenché de nombreuses polémiques.

Si les prédictions du modèle de Malthus peuvent se révéler correctes sur un temps court, elles sont irréalistes sur un temps long, notamment en raison de l'insuffisance des ressources disponibles. Ainsi, Pierre-François Verhulst, mathématicien belge, propose en 1838 un modèle décrivant l'évolution de populations tendant vers un seuil maximal. Mais le modèle de Verhulst atteint lui aussi ses limites.

Des modèles plus élaborés et plus récents prévoient que la population mondiale atteindra environ 10 milliards d'humains en 2050. Cela interroge les ressources mondiales : ressources naturelles, ressources alimentaires, ressources en eau potable, etc. Les enjeux sont tout à la fois écologiques, économiques, humanitaires et sanitaires.

Les mathématiques et les modèles démographiques

Variation absolue, variation relative

On considère une population dont l'effectif évolue par palier, de la valeur $u(n)$ à la période n à l'effectif $u(n+1)$ à la période $n+1$. On appelle :

- variation absolue la différence $u(n+1)-u(n)$;
- variation relative le quotient $\frac{u(n+1)-u(n)}{u(n)}$.

La variation relative est encore appelée taux d'accroissement ou taux de variation entre l'état $u(n)$ et l'état $u(n+1)$.

Définition d'une suite

Une suite est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (ou sur une partie de l'ensemble). Pour simplifier, on considère ici que la suite u est définie sur $\mathbb{N}$.

L'image de l'entier n par la suite u est notée $u(n)$ ou encore u_n.

On dit que u_n est le terme de rang n (ou d'indice n) de la suite u. Pour les élèves qui n'ont pas suivi pas la spécialité mathématique de première, on privilégiera, au moins en début d'apprentissage, la notation fonctionnelle $u(n)$.

Un cas particulier : suite arithmétique et modèle linéaire

Lorsque, pour tout entier naturel n, la variation absolue $u(n+1)-u(n)$ entre deux états consécutifs est constante, la suite est dite arithmétique. La valeur constante de la variation entre deux paliers consécutifs est appelée raison de la suite.

Ainsi, u étant une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ et de raison r, on a, pour tout entier naturel n, $u(n+1)-u(n)=r$.

On peut en déduire que, pour tout entier naturel n, $u(n)=u(0)+n\times r$.

Les points de coordonnées $(n, u(n))$ sont situés sur une droite.

Dans la réalité, pour une population dont la variation absolue est presque constante d'un palier à l'autre, on peut ajuster le nuage de points qui la représente par une droite. Cet ajustement est appelé modèle linéaire.

Le modèle linéaire est inadapté pour représenter l'évolution d'une grandeur dont la variation absolue change fortement d'un palier à l'autre.

De manière générale, il n'est pas utilisé pour représenter l'évolution d'une population humaine ou animale. En revanche, il peut servir pour traduire l'évolution de certaines ressources, par exemple alimentaires.

Un cas particulier : suite géométrique et modèle exponentiel

Pour simplifier, on considère ici une suite dont aucun terme n'est nul.

Lorsque pour tout entier naturel n, le rapport $\frac{u(n+1)}{u(n)}$ entre deux termes consécutifs est constant, la suite est dite géométrique.
Le rapport constant est appelé *raison* de la suite.

Ainsi, u étant une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ et de raison q, on a, pour tout entier naturel n, $\frac{u(n+1)}{u(n)} = q$

On peut en déduire que, pour tout entier naturel n, $u(n) = u(0) \times q^n$.

On dit qu'une grandeur discrète u varie de manière exponentielle (ou géométrique) en fonction du palier entier n si sa variation absolue $u(n+1) - u(n)$ est proportionnelle à sa valeur courante $u(n)$.

Dans ce cas, sa variation relative (ou taux de variation) est constante et la suite de terme général $u(n)$ est géométrique.

En effet, s'il existe un nombre réel k tel que, pour tout entier naturel n, $u(n+1) - u(n) = k \times u(n)$, alors $u(n+1) = (1+k) \times u(n)$

La suite u est géométrique de raison $(1+k)$.

Dans la réalité, pour une population dont le taux de variation est presque constant d'un palier à l'autre, on peut ajuster le nuage de points par un modèle exponentiel.

Modèles démographiques

Chaque modèle démographique étudié offre l'occasion de mettre en œuvre une démarche de modélisation mathématique, avec notamment trois étapes :

- l'identification du type de modèle le mieux adapté pour traduire la réalité;
- la détermination des paramètres du modèle (calibrage);
- la confrontation des résultats du modèle à des observations, qui peut conduire à limiterson domaine de validité ou à lemodifier.

Propositions d'activités

Activité 1 : analyse d'un extrait du livre d'Albert Jacquard *Voici le temps du monde fini*

Cette activité est issue des ressources de l'académie de Nancy-Metz, 2002.
Voici un extrait du texte d'Albert Jacquard :

« Un accroissement d'une population de 2 % par an peut sembler bien faible,
il correspond pourtant à

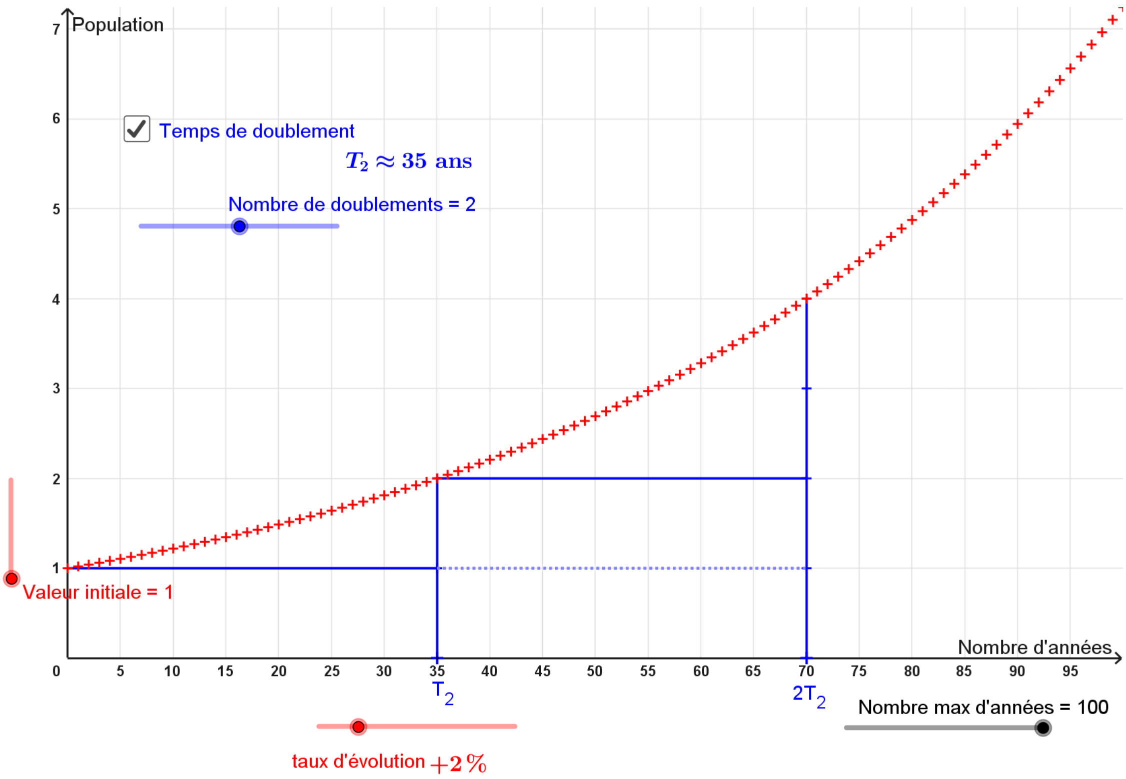
un doublement en 35 ans donc à un quadruplement en 70 ans, à une multiplication par 7 en moins d'un siècle. »

1. Les affirmations de l'auteur sont-elles exactes?
2. En admettant un accroissement de la population de 2 % par an, combien serions-nous en 2050 ?

Télécharger l'animation Geogebra© intitulée « Croissance exponentielle et temps dedoublement».

Cette animation permet de visualiser l'évolution d'une population suivant un modèle exponentiel, d'année en année, à partir d'un effectif initial et d'un taux d'accroissement donnés. Elle permet également de visualiser le temps nécessaire pour le doublement d'une population, à partir d'un taux d'accroissement donné.

Il est ainsi possible de constater que, si le temps de doublement dépend du taux d'accroissement, il ne dépend pas de l'effectif initial de la population.



Remarques

- Cette activité peut permettre d'introduire la notion de suite, et le cas particulier de suite géométrique. Les deux notations (fonctionnelle et indicielle) peuvent être utilisées selonle degré de familiarité des élèves avec lanotion.
- Le temps de doublement d'une population évoluant selon un modèle exponentiel sera mis en parallèle avec la demi-vie d'un élément radioactif étudiée dans le programme de première d'enseignement scientifique.
- On fera remarquer que, de même que pour la demi-vie, le temps de doublement ne dépend pas de l'effectif initial.
- Cette activité peut être prolongée d'un débat:

9, 10, 11 milliards d'humains... jusqu'à quelle limite peut-on peupler la Terre ?
Sur le thème « Quels enjeux écologiques, économiques, humanitaires et sanitaires pour une Terre de plus de 10 milliards d'habitants ? », l'émission *L'invité des matins* du 14 août 2015 sur France Culture a interrogé deux invités : Gilles Pison, directeur de recherches à l'institut national d'études démographiques (INED), rédacteur en chef de *Population et sociétés* et Jean-Louis Rastoin, professeur émérite à Montpellier SupAgro et directeur de la chaire UNESCO sur l'alimentation.

Le lien ci-dessous permet d'écouter leurs échanges : 9, 10, 11 milliards d'humain... jusqu'à quellelimite peut-on surpeupler la Terre ?

Activité 2 : analyse d'un premier extrait du texte de Thomas Malthus *Essai sur le principe de population*

Cette activité provient d'un travail de l'institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) de Poitiers.

Voici un extrait du texte de Thomas Malthus *Essai sur le principe de population*, 1798 :

« Selon la table d'Euler, si l'on se base sur une mortalité de 1 sur 36 et si naissances et morts sont dans le rapport de 3 à 1, le chiffre de la population doublera en 12 années et 4/5. Ce n'est point là une simple supposition : c'est une réalité qui s'est produite plusieurs fois, et à de courts intervalles.

Cependant, pour ne pas être taxé d'exagération, nous nous baserons sur l'accroissement le moins rapide, qui est garanti par la concordance de tous les témoignages. Nous pouvons être certains que lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle double tous les vingt-cinq ans, et croît ainsi de période en période selon une progression géométrique. Il est moins facile de mesurer l'accroissement des produits de la Terre. »

Questionnement possible

1. En se référant aux hypothèses faites par Malthus, quel est l'accroissement annuel dela population?
2. Expliquer pourquoi le doublement de la population nécessite 12 années et $\frac{4}{5}$.

Télécharger l'animation Geogebra© intitulée « Croissance exponentielle et temps dedoublement».

Activité 3 : analyse d'un autre extrait du texte Thomas Malthus

Cette activité, qui provient d'un travail de l'institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) de Lyon, permet de comparer l'évolution d'une population et de ses moyens de subsistance.

Voici un autre extrait du texte de Thomas Malthus :

« Comptons pour 11 millions la population de la Grande-Bretagne et supposons que le produit actuel de son sol suffit pour la maintenir. Au bout de vingt-cinq ans, la population sera de 22 millions ; et la nourriture ayant également doublé, elle suffira encore à l'entretenir. Après une seconde période de vingt-cinq ans, la population sera portée à 44 millions, mais les moyens de subsistance ne pourront plus nourrir que 33 millions d'habitants. Dans la période suivante, la population – arrivée à

88 millions – ne trouvera des moyens de subsistance que pour la moitié de ce nombre [...]. La race humaine croîtra selon la progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256... tandis que les moyens de

subsistance croîtront selon la progression 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 [...]. Le rythme d'accroissement de la population, de période en période, l'emporte donc tellement sur celui de l'augmentation des subsistances que, pour maintenir le niveau et pour que la population existante trouve toujours des aliments en quantité suffisante, il faut qu'à chaque instant une loi supérieure fasse obstacle à son extension. »

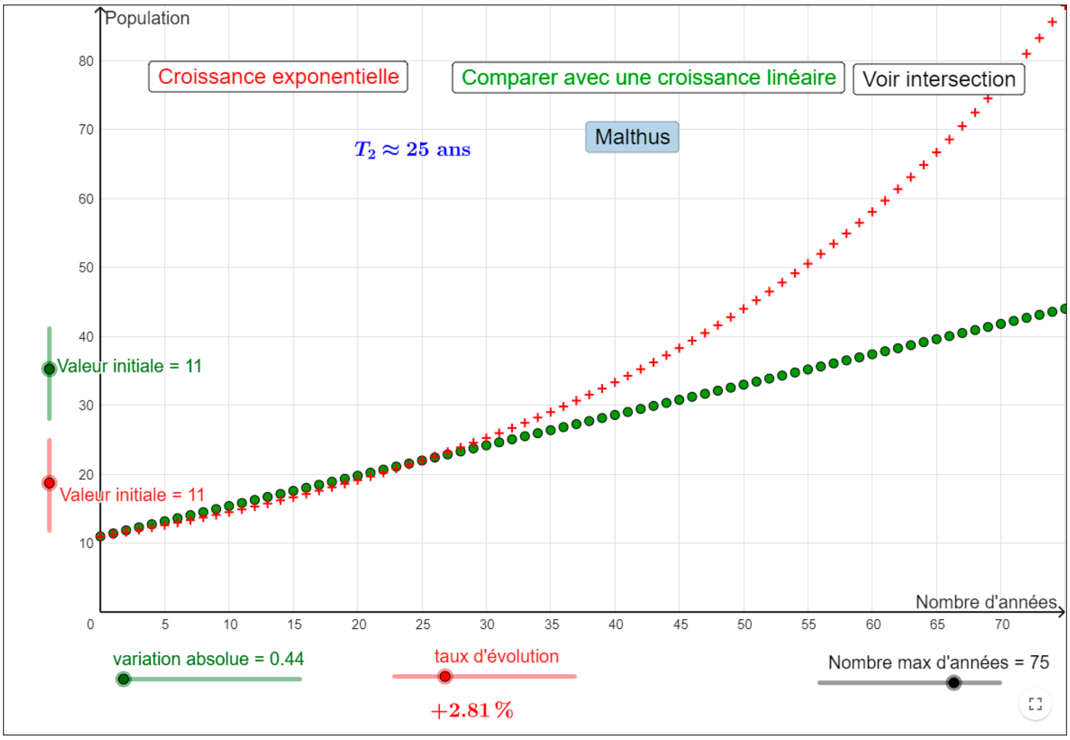
Questionnement possible

1. En appliquant le raisonnement de Thomas Malthus à partir de l'année 1798, combien pouvait- on prévoir d'habitants en 1923 en Grande-Bretagne?
2. Toujours selon le raisonnement de Thomas Malthus, estimer les moyens de subsistance en Grande Bretagne en 1923. Les moyens de subsistance sont assimilés au nombred'habitants qu'ils permettent d'entretenir.
3. Qualifier l'évolution de la population et celle des moyens de subsistance selon leshypothèses de ThomasMalthus.
4. Selon le raisonnement de Thomas Malthus, déterminer tous les 25 ans, de 1798 à 1923 :
    a. le nombre d'habitants en Grande Bretagne;
    b. le nombre d'habitants de Grande Bretagne dont les besoins alimentaires sont assurés;
    c. le pourcentage de la population dont les besoins alimentaires sontassurés.

Télécharger l'animation Geogebra© intitulée « Croissance exponentielle vs linéaire».

Cette animation permet cette fois de comparer la croissance exponentielle de la population et la croissance linéaire des moyens de subsistance.

En cliquant sur le bouton Malthus, les paramètres sont automatiquement ajustés aux valeurs étudiées par Malthus dans ce texte.



Remarques

Cette activité peut permettre d'illustrer les notions de suite arithmétique et suitegéométrique.

Ellepermetdecomparerlacroissanceexponentielled'unesuitegéométrique(devariationrelative constante) et la croissance linéaire d'une suite arithmétique (de variation absolueconstante).

Elle peut être enrichie en confrontant les effectifs résultant de la modélisation aux données réelles grâce au site de l'INED : [Démographie des pays développés - Bases de données en ligne - Leschiffres]

Activité 4 : évolution de la population du Japon

Les tableaux ci-dessous donnent l'effectif de la population du Japon (exprimée en million), par paliers de 5 ans, de 1900 à 2010 :

n nombre d'années écoulées depuis 1900	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
Effectif de la population année 1900 + n	44,8	47	50,7	53,4	55,9	59,7	64,5	69,3	73,1	72,4	83,6	87,9

n nombre d'années écoulées depuis 1900	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
Effectif de la population année 1900 + n	92,5	98,8	104,7	111,9	116,8	120,8	123,5	125,6	126,9	127,4	128,6

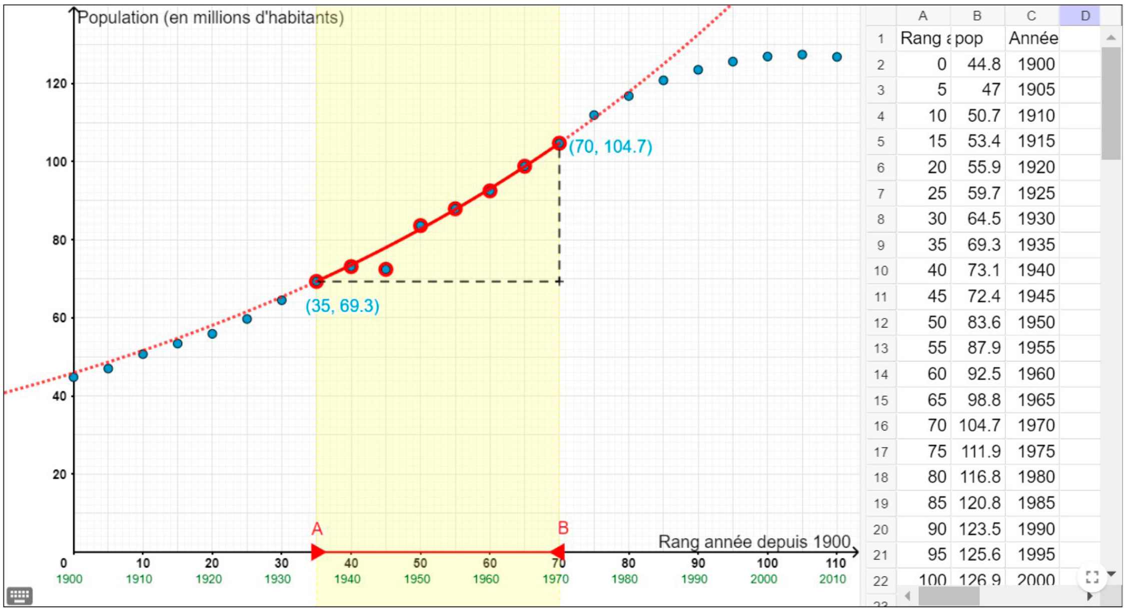
1. Représenter le nuage de points associé à cetableau.
2. Comment peut-on expliquer la baisse de la population de 1940 à 1945 ?
3. On décide de modéliser la population entre 1950 et 1980 par les 31 premiers termesd'une suite géométrique (v_n) vérifiant $v_0 = 83{,}6$ et $v_{30} = 116{,}8$.
   a. Calculer la raison de cettesuite.
   d. Utiliser ce modèle pour estimer la population du Japon en1973.
4. Ce modèle semble-t-il pertinent pour estimer la population du Japon de 1980 à 2010 ?
5. Selon Pierre-François Verhulst, mathématicien belge, une population donnée a tendance àse stabiliser. Autrement dit, elle a tendance à atteindre un seuil maximal qui ne peut être dépassé du fait des ressources limitées qui empêchent la population de croître davantage. Expliquer en quoi la population actuelle du Japon donne raison à Pierre-FrançoisVerhulst.
6. Justifier qu'on peut parler d'une « croissance qui décélère » de 1980 à2010.

Remarque

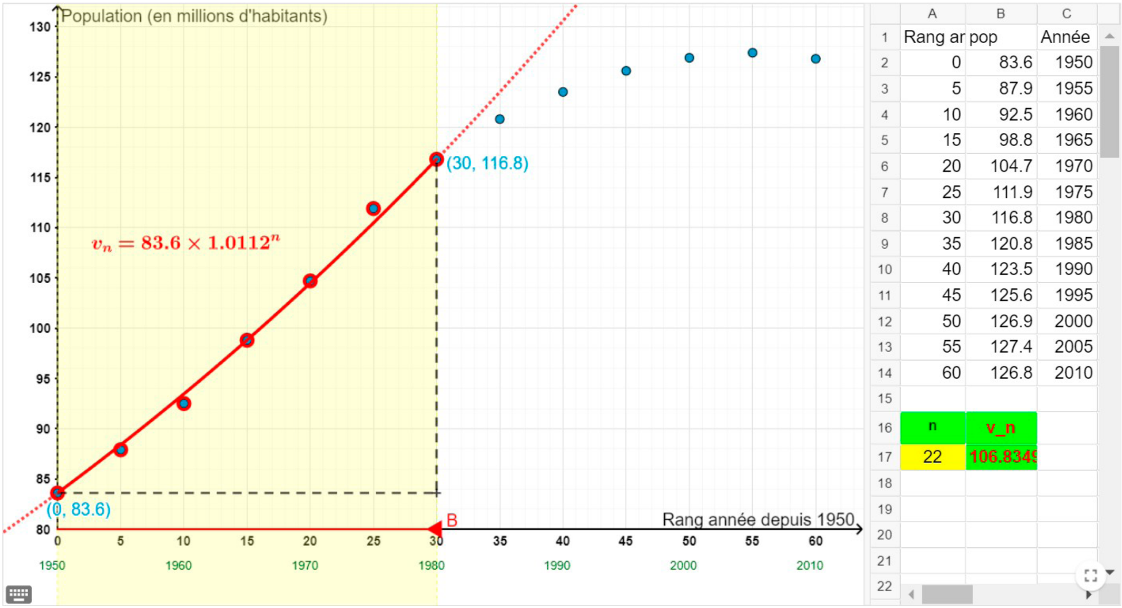
La résolution, à la calculatrice, de l'équation $q^{30} = 1{,}3947$ permet d'introduire la racine trentième et les notations $\sqrt[30]{1{,}3947}$ et $1{,}3947^{\frac{1}{30}}$. On fera le lien avec la racine douzième de 2 introduite en classe de première pour construire la gamme à 12 notes au tempérament égal.

L'appliquette GeoGebra© intitulée « [Modèle exponentiel d'évolution d'une population](#) » donne le nuage de points de la population du Japon de 1900 à 2010.

Elle permet de visualiser une approximation exponentielle sur la période entre 1900 et 2010. On constate un décrochage entre les données et le modèle après 1980. En revanche, l'approximation semble très bonne entre 1950 à 1980. La restriction à cette période est alors étudiée dans une [deuxième animation](#).



Retrouvez éduscol sur



Pour aller plus loin

Deux mathématiciens belges du XIXe siècle, Adolphe Quételet et Pierre-François Verhulst, ont interrogé le modèle de Malthus.

Le texte ci-dessous est dû à Adolphe Quételet :

« Il paraît incontestable que la population croîtrait selon une progression géométrique, s'il ne se présentait aucun obstacle à son développement. Les moyens de subsistance ne se développent point aussi rapidement, et, selon Malthus, dans les circonstances les plus favorables à l'industrie, ils ne peuvent jamais augmenter plus vite que selon une progression arithmétique. Le grand obstacle à la population est donc le manque de nourriture, provenant de la différence des rapports que suivent ces deux quantités dans leurs accroissements respectifs. Quand une population, dans son développement, est parvenue au niveau de ses moyens de subsistance, elle doit s'arrêter à cette limite par la prévoyance des hommes ; ou si elle a le malheur de la franchir, elle s'y trouve forcément ramenée par un excès de mortalité.

Les obstacles à la population peuvent donc être rangés sous deux chefs. Les uns agissent en prévenant l'accroissement de la population, et les autres en la détruisant à mesure qu'elle se forme. La somme des premiers compose ce que l'on peut appeler l'obstacle privatif ; celle des seconds l'obstacle destructif. »

Pierre François Verhulst, mathématicien belge, considère que la population peut se développer sans contrainte conformément au modèle de Malthus pendant une courte période d'explosion démographique et suivre ainsi une croissance géométrique.

Mais les ressources n'étant pas inépuisables, la croissance de la population sera ensuite freinée et limitée. Verhulst teste plusieurs modèles dont le plus simple consiste à rajouter un facteur retardateur du type $a \times (u(n) - b)$ au modèle de Malthus, ce qui donne : $\frac{u(n+1)-u(n)}{u(n)} = k - a \times (u(n) - b)$. b est l'effectif de la population (dite normale) au moment du « décrochage » de l'hypothèse de Malthus et a un réel positif appelé coefficient retardateur.

Dans le cadre de la différenciation pédagogique, le modèle de Verhulst pourra être présenté à certains élèves.

Pour éviter certains « raccourcis de pensée »

Certains raccourcis assimilent croissance « rapide » et croissance « exponentielle ».
Pour les éviter, il importe d'évoquer différents modèles : croissance linéaire, croissance plus rapide qu'une croissance linéaire mais non exponentielle (par exemple croissance polynomiale), décroissance pouvant ou non aboutir à l'extinction de la population.

Des bases de données sur la population mondiale sont disponibles sur le site de l'INED.

Des bases de données sur diverses productions de céréales sont disponibles sur le site :

- https://www.planetoscope.com/cereales/190-production-mondiale-de-cereales.html
- http://www.fao.org/worldfoodsituation/csdb/fr/

On peut étudier des populations animales (insectes, grands mammifères, etc.).

En conclusion

L'étude des modèles démographiques permet aux élèves de comprendre :

- ce qu'est un modèle mathématique et comment on l'utilise (choix, calibrage, périmètre de validité, etc.);
- qu'un modèle peut être appliqué à des contextes parfois éloignés de ceux pour lequel il a été construit;
- les bouleversements sociétaux impactés par l'évolution des populations ;
- le rôle de la communauté scientifique dans un débat d'idées de naturesociétale.

Bibliographie et sitographie

- *Essai sur le principe de population* de Thomas Malthus
- Parcours d'étude de 1ére S de l'IREM de Poitiers
- *Le problème démographique au Japon*, Jean Robin,1951.
- *Pierre-François Verhulst et la loi logistique de la population*, Bernard Delmas, publié dans Math. & Sci. hum. / Mathematics and Social Sciences (42e année, n° 167, 2004, p.51-81)
- Site de l'INED sur la populationmondiale
- Production mondiale de céréales :
  - https://www.planetoscope.com/cereales/190-production-mondiale-de-cereales.html
  - http://www.fao.org/worldfoodsituation/csdb/fr/