MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

VOIE GÉNÉRALE

2DE | 1RE | TLE

Mathématiques

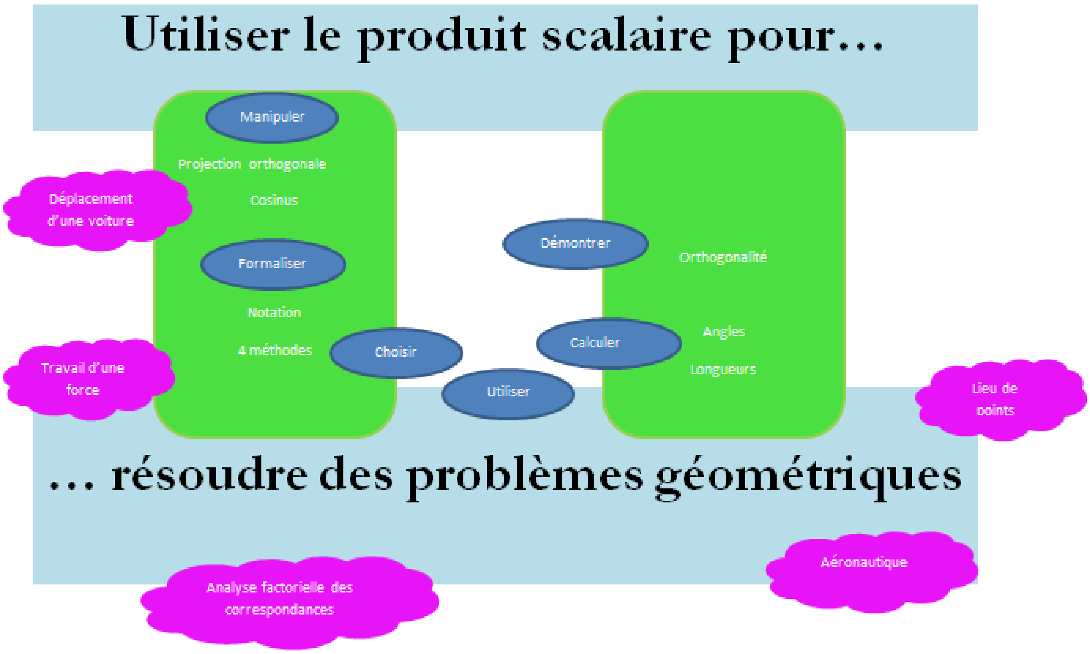
ENSEIGNEMENT SPECIALITE

GÉOMÉTRIE POUR TOUS ET PARTOUT

LE PRODUIT SCALAIRE

Le produit scalaire, dans le contexte de la géométrie plane, est une notion nouvelle importante du programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de première. C'est un outil efficace pour la résolution, par des méthodes vectorielles, de problèmes géométriques faisant intervenir distances, orthogonalité, angles.

Comme le montre ce document, l'intérêt du produit scalaire ne se limite cependant pas à la seule géométrie : il intervient en effet en physique, en statistique et dans ses applications aux sciences sociales. Il est intéressant d'en avoir conscience, même si certaines de ces applications vont bien au-delà du programme de première.



Références au programme

L'étude de la géométrie plane menée au collège et en seconde a familiarisé les élèves à la géométrie de configuration, au calcul vectoriel et à la géométrie repérée.
En première on poursuit l'étude de la géométrie plane en introduisant de nouveaux outils. L'enseignement est organisé autour des objectifs suivants :

--- donner de nouveaux outils efficaces en vue de la résolution de problèmes géométriques, du point de vue métrique.

--- enrichir la géométrie repérée de manière à pouvoir traiter des problèmes faisant intervenir l'orthogonalité.

Connaissances

Les élèves ont étudié les vecteurs (avec ou sans coordonnées) en seconde. Ils ont résolu des problèmes de configuration plane à l'aide du calcul vectoriel, essentiellement liés au parallélisme.

Une image mentale

Le produit scalaire est défini à partir de la projection orthogonale. Les situations permettent d'introduire le produit scalaire à partir de l'intuition des élèves pour les amener vers de nouveaux savoirs et compétences, ces premières activités offrent en référence au programme des temps de recherche, d'activité et de manipulation, prolongés par des temps de dialogue, d'échanges et de verbalisation.

Objectifs

- Permettre à l'élève de percevoir la composante des forces exerçant un travail sur un déplacement (projection orthogonale): mettre en place une image mentale forte
- Déterminer deux expressions pour le produit scalaire

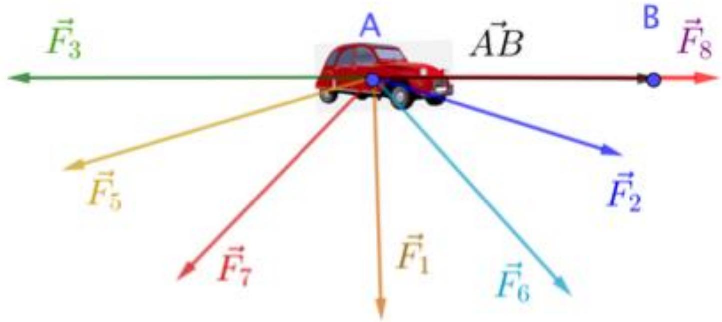
Étape 1

Sur le schéma ci-dessous, la voiture effectue un déplacement rectiligne de A vers B.

$\overrightarrow{AB}$ représente le déplacement rectiligne de la voiture,

$\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots \overrightarrow{F_8}$ représentent différentes forces appliquées à la voiture.

Quelles forces favorisent le mouvement ? S'opposent au mouvement ?



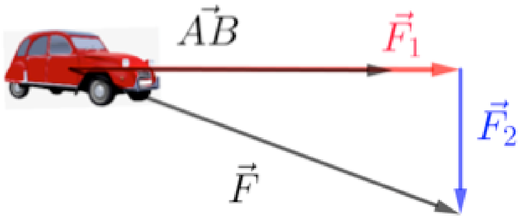
Scénario pédagogique

Cette activité se prête à un travail en commun en classe entière. Pour ce premier travail, il est essentiel de permettre un temps d'appropriation individuel et de partir de l'intuition de chaque élève. La restitution permet une verbalisation par un questionnement plus fin : quelles forces favorisent le plus le mouvement ? Le moins le mouvement ? Est-ce que l'on pourrait justifier cette réponse numériquement ? $\overrightarrow{F_6}$ a une plus grande intensité que $\overrightarrow{F_2}$, a-t-elle plus d'effet sur le mouvement ?

L'idée est de faire émerger la projection orthogonale sur l'axe du déplacement, pour justifier la décomposition de la deuxième partie de l'activité.

Étape 2

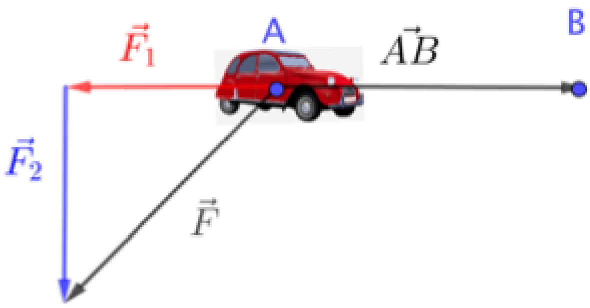
On s'intéresse maintenant à une seule force $\vec{F}$ qui s'applique à la voiture (pouvant être le vent venant de derrière). Cette force $\vec{F}$ est la résultante de deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ comme sur le schéma suivant ($\vec{F_1}$ étant de même direction que le déplacement de la voiture et $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ ayant des directions perpendiculaires). Quelle composante de la force $\vec{F}$ a une action sur le déplacement de la voiture ?



Scénario pédagogique

On amène par l'intuition le fait que seule la composante colinéaire au déplacement a une action. On admet que l'action des forces colinéaires et de même sens est proportionnelle à leur intensité. En physique, on note W le travail de la force $\vec{F}$ sur la voiture lors de son déplacement de A en B. On a $W = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\vec{F_1}\|$. La notation en physique est un peu plus lourde : $W_{AB}(\vec{F})$. Il n'est pas opportun de l'introduire ici. De même, les unités en physique sont systématiquement données, on peut en maths en parler mais il ne faut pas noyer les élèves dans trop de détails à ce stade.

On se pose ensuite la question de savoir quel serait le travail d'une force qui s'oppose au mouvement.



On établit ainsi la formule du travail : $W = -\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\vec{F_1}\|$ dans le cas d'une force qui s'oppose au mouvement et W = 0 dans le cas d'une force de direction perpendiculaire au mouvement.

On donne alors dans la trace écrite de cours, la définition du projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{v}$ sur la direction du vecteur $\vec{u}$ et la définition du produit scalaire mathématique de deux vecteurs non nuls :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\overrightarrow{v'}$ où $\overrightarrow{v'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la direction de $\vec{u}$;

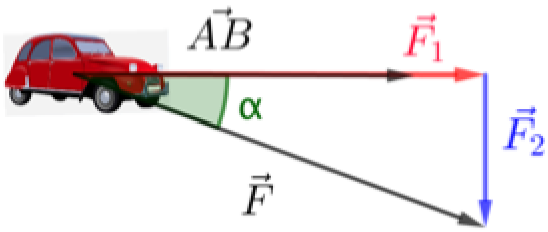
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v'}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ sont colinéaires de même sens ;
- $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v'}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ sont colinéaires de sens contraire.

La projection d'un vecteur sur un axe horizontal favorise la **construction d'une image mentale** simple créant un automatisme. C'est cette image mentale qui pourra être rappelée tout au long des séances sur ce thème.

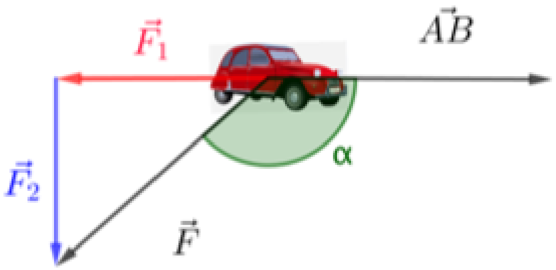
En reprenant l'exemple de la voiture de l'étape 2, on peut se demander si d'autres forces que $\vec{F}$ auraient la même action sur le déplacement de la voiture. Puis on s'intéresse aux propriétés du nouvel objet mathématique qui vient d'être introduit.

Étape 3

Comment exprimer $\|\vec{F_1}\|$? Et le travail en fonction de la force $\vec{F}$?



Que se passe-t-il dans le cas où la force s'oppose au déplacement de la voiture ? Quelle composante agit sur le déplacement de la voiture ? Comment traduire dans la formule du travail le fait que les forces s'opposent? Quelle formule peut-on donner pour le travail de la force $\vec{F}$?



Remarque

Une première propriété du produit scalaire est ainsi établie en lien avec le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs.

Appropriation des propriétés

> **Contenus**
> Caractérisation de l'orthogonalité.
> Bilinéarité, symétrie.
> En base orthonormée, expression du produit scalaire et de la norme, critère d'orthogonalité.

Capacités attendues
Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans le plan ou dans l'espace.

Objectifs
Établir les propriétés du produit scalaire.
Établir l'expression du produit scalaire à partir des coordonnées de vecteurs
Établir le critère d'orthogonalité.
Place de l'oral
« Les étapes de verbalisation et de reformulation jouent un rôle majeur dans l'appropriation des notions mathématiques et la résolution de problèmes. [...] Des situations variées se prêtent à la pratique de l'oral en mathématiques : [...] les mises en commun après un temps de recherche. »

Scénario pédagogique

À travers un parcours différencié, les différentes propriétés du produit scalaire sont établies. En proposant un travail de groupe, la construction du cours peut être mise en place par la restitution des travaux de recherche : chaque équipe propose et explique oralement ses résultats. Cela facilite la différenciation du travail et prépare au grand oral. Les groupes doivent être composés par l'enseignant selon les appétences de chacun et selon le projet de formation de chacun.

Dans chaque cas, il s'agit de s'appuyer sur la définition du produit scalaire à l'aide du projeté orthogonal.

Groupe 1

Lorsque $\vec{u}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont orthogonaux, on a $\vec{u} \cdot \ \vec{v} = 0$.
Justifier cette affirmation. Que dire de la réciproque ?
Que dire de $(k\vec{u}) \cdot \vec{v}$ où k est un nombre réel ?

Groupe 2

On a défini le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{v'}$ où $\overrightarrow{v'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la direction de $\vec{u}$.
Que peut-on dire de $\vec{v} \cdot \vec{u}$?

Groupe 3

Comment calculer $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$?

Groupe 4

- En se plaçant dans un repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé.

Que dire du projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{u}$ sur l'axe $(0, \vec{\imath})$ et du projeté orthogonal d'un représentant de $\vec{u}$, d'origine O, sur l'axe $(0, \vec{\imath})$?

- On suppose connues les propriétés $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \ \vec{v} + \ \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Peut-on calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ à partir des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé ?

Commentaires

Chaque groupe analyse une propriété particulière et devra restituer ses recherches oralement, dans un ordre précis afin de construire le cours. Il faut équilibrer la quantité de travail entre chaque groupe afin que tous aboutissent de façon synchronisée et dans un temps raisonnable. Une trace écrite claire et concise permet ensuite de synthétiser le travail de chaque groupe.

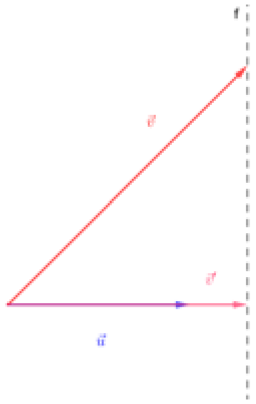
Groupe 1

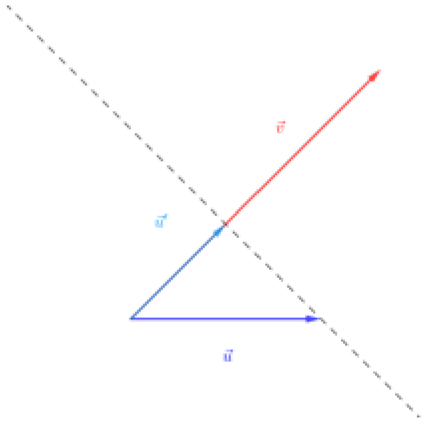
Le travail de ce groupe permet d'établir le critère d'orthogonalité (deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$) à partir des projections orthogonales.

Le travail sur $(k\vec{u}) \cdot \vec{v}$ se fait aussi à partir des projections orthogonales.

Groupe 2

Le projeté orthogonal d'un vecteur sur une direction est souvent illustré de façon plus intuitive avec une projection sur un axe horizontal, de $\vec{v}$ sur la direction de $\vec{u}$. Il s'agit ici de mettre en place la projection de $\vec{u}$ sur la direction de $\vec{v}$, ainsi que la symétrie du produit scalaire.



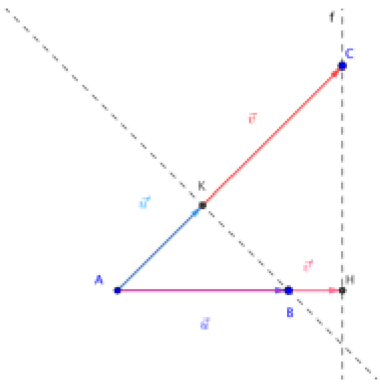


Piste de travail

On peut demander aux élèves de réfléchir :

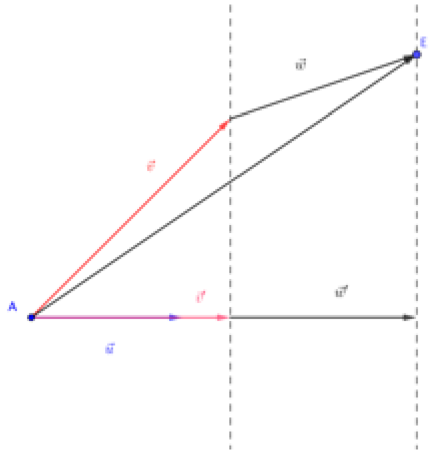
- à partir de dessins sur papier ;
- puis sur géogébra ;
- de conjecturer un résultat ;
- enfin, de rédiger la démonstration.

Il peut être judicieux de conseiller de placer des points, d'exprimer ce que l'on pense pouvoir montrer, et de donner des indices (triangles rectangles, cosinus…).



Groupe 3

En raisonnant avec la projection orthogonale, on peut raisonner par disjonction des cas et chercher à obtenir l'idée de la démonstration. On obtiendra une partie de la bilinéarité du produit scalaire (à compléter par le travail du groupe 1).



Groupe 4

Il s'agit de montrer l'égalité des projetés orthogonaux, quel que soit le représentant du vecteur que l'on utilise. Cette question peut faire l'objet d'une visualisation sous logiciel de géométrie dynamique. Ensuite, on amène le groupe à calculer le produit scalaire de deux vecteurs à l'aide de leurs coordonnées et d'un développement. Pour cela, il leur faut admettre dans un premier temps les propriétés de bilinéarité du produit scalaire et exprimer les vecteurs à l'aide de leurs coordonnées et des vecteurs de base. La définition d'un repère orthonormé peut être donnée si cela n'a pas été fait avant.

Utilisation du produit scalaire, ouverture sur d'autres disciplines

Utilisation du produit scalaire en mathématiques

On s'attache à manipuler les différentes formules obtenues pour le produit scalaire de deux vecteurs afin d'en montrer tout l'intérêt.

- Dans un premier temps on peut manipuler une seule formule, celle qui pose le plus de problème aux élèves.

À partir de la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos \alpha$, déterminer quelle est la valeur manquante pour chaque cas et la calculer (avec une valeur α en radians) :

a) $||\vec{u}|| = 5,\ ||\vec{v}|| = 7$ et $\alpha = \pi/6$

b) $||\vec{u}|| = 3,\ \alpha = \pi/3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15$

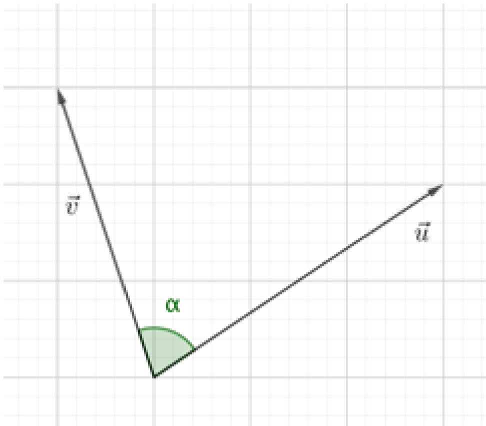
c) $||\vec{u}|| = 3,\ ||\vec{v}|| = 7$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10{,}5\sqrt{2}$

d) $||\vec{u}|| = 4,\ ||\vec{v}|| = 1$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$

- Dans un deuxième temps, on utilise toutes les formules.

Exemple 1

Quelle est la valeur de l'angle α au degré près?



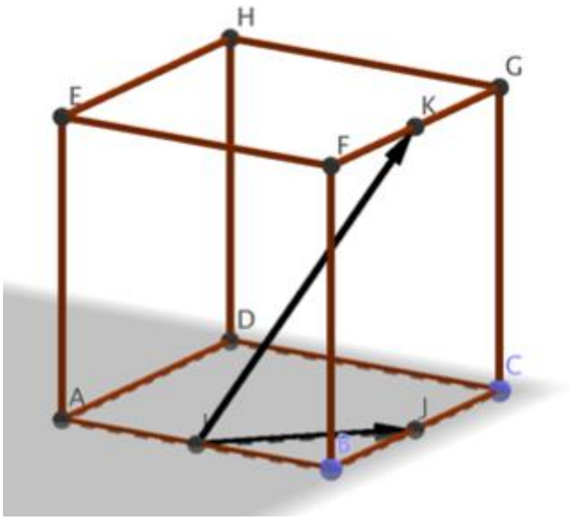
Exemple 2

Dans un repère orthonormé, que doit valoir y pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ forment un angle de 25° ?

Exemple 3

On peut proposer un exercice de géométrie dans l'espace

Soit un cube ABCDEFGH de côté 4 cm avec I, J et K les milieux respectifs de [AB], [BC] et [FG].



1) Déterminer l'angle $\widehat{HIJ}$ de deux méthodes différentes :
   a. en calculant le produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK}$ à l'aide d'une projection orthogonale
   b. en calculant le produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK}$ à l'aide de coordonnées dans un repère bien choisi.

2) Déterminer l'angle $\widehat{IEG}$.

3) Déterminer l'angle $\widehat{EGK}$.

Utilisation du produit scalaire dans la résolution d'un problème de lieu de points (cercles)

« Les problèmes posés aux élèves peuvent être internes aux mathématiques ». Le cas de la détermination d'orthogonalités est classique et des ressources existent déjà. On s'intéresse dans ce document à la nouveauté du programme qui permet de travailler sur un lieu de points: la caractérisation du lieu des points M du plan vérifiant relation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Objectifs

Caractériser des lieux de points par une relation liée au produit scalaire.
Chercher un lieu de points.
Raisonner : établir une équivalence.
Communiquer un résultat.

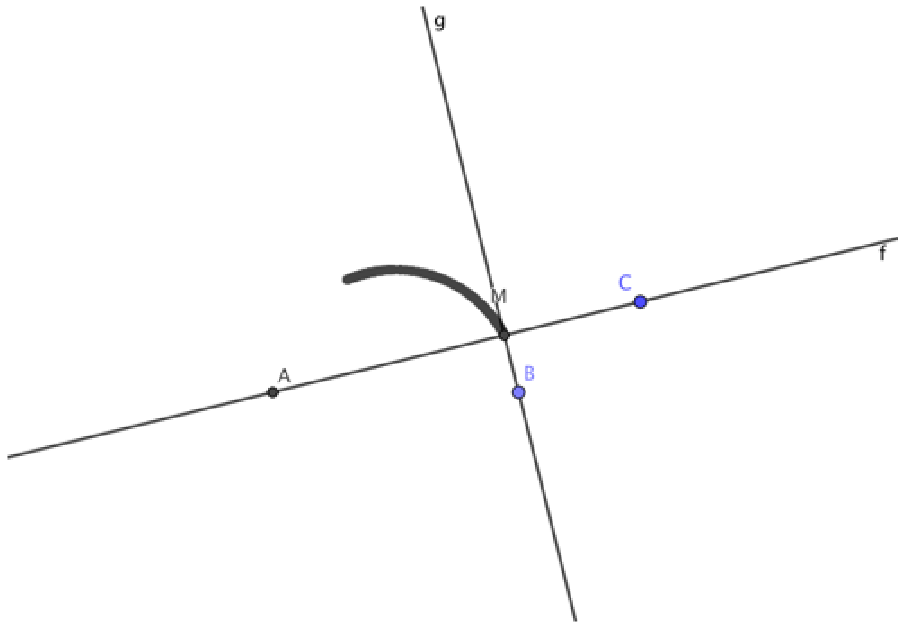
Piste de différenciation

Première étape : analyse en classe entière du critère $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Deuxième étape : recherche individuelle de tels points.

Troisième étape : recherche collective de tels points M sous GeoGebra.

On place dans le plan (sans repère) deux points A et B, un troisième, nommé C qui sera mobile. On trace la droite (AC) puis la perpendiculaire à (AC) passant par B. Cela vient après un temps de recherche collective et la traduction du critère $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ par le fait qu'il faut un angle droit entre deux droites (AM) et (BM). Le point d'intersection entre les deux droites (AC) et (AB) est alors nommé M et on affiche la trace de M. Il suffit de faire bouger le point C pour voir un arc de cercle se dessiner. On obtient le fait que les points M semblent être sur le cercle de diamètre [AB]. Il reste à le démontrer et à vérifier si tous les points du cercle conviennent.



Quatrième étape : démonstration.

Prolongation possible

On s'intéresse ensuite à la transformation de l'expression $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

On peut en déduire les équations de cercle dans un repère orthonormé en exprimant le produit scalaire grâce aux coordonnées de vecteurs.

Utilisation du produit scalaire pour résoudre un autre problème de lieu de points (droites)

Il s'agit de réinvestir l'image mentale construite lors de l'activité d'introduction du produit scalaire et de réactiver un résultat obtenu lors du questionnement « Y a-t-il d'autres forces produisant la même action sur la voiture ? »

> **Objectifs**
> Chercher et caractériser des lieux de points par une relation liée au produit scalaire.
> Raisonner : établir une équivalence.
> Communiquer un résultat.
> Différencier en jouant sur les variables didactiques.

Pistes de différenciation

Énoncé

Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u} = k$ avec O un point du plan fixé, k une constante et $\vec{u}$ un vecteur fixé.

On peut faire travailler les élèves en recherche individuelle en jouant pour chacun sur les variables didactiques :

- en fixant un vecteur $\vec{u}$ « horizontal » de norme 1, et en demandant de trouver la solution du problème pour $k = 0$, ou 1 , ou -3, ou $2{,}5$…
- en fixant un vecteur $\vec{u}$ « horizontal » de norme quelconque (au choix des élèves), et en demandant de trouver la solution du problème pour $k = 0$, ou 2 , ou -4, ou $2{,}5$…
- en fixant un vecteur $\vec{u}$ « non horizontal » de norme 1 ou pas, et en demandant de trouver la solution du problème pour $k = 0$, ou 1 , ou -3, ou 2,5…

La généralisation est ensuite obtenue après synthèse des résultats.

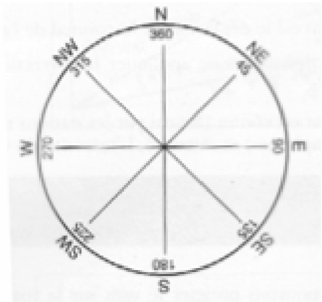
Utilisation du produit scalaire en aéronautique

> ### Référence au programme
> Les problèmes posés aux élèves peuvent […] être issus des autres disciplines ou du monde réel.

Calcul de dérive d'avion et correction de trajectoires

Pré requis : la formule d'Al-Kashi

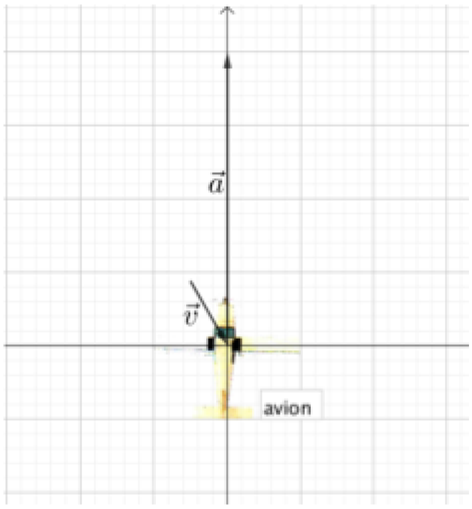
Un avion se dirigeant vers le nord à la vitesse $\vec{a}$ de 120 kt (nœuds) doit faire face à un vent provenant de la direction 330, à la vitesse de 30 kt, symbolisé par le vecteur $\vec{v}$ (1 kt vaut environ 1,85 km/h).



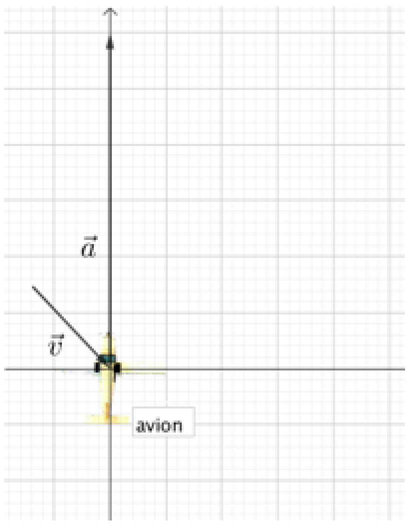
1) Les deux forces s'ajoutent pour donner le vecteur vitesse réelle de l'avion : il a donc une vitesse et une trajectoire différente de celle qui sont voulues. L'angle que sa nouvelle trajectoire fait avec la trajectoire qu'il devrait suivre est appelé la « dérive » de l'avion.

Déterminer la nouvelle vitesse et la dérive de l'avion.

2) Quelle direction et quelle vitesse doit-il programmer sur son pilote automatique afin de conserver le cap nord et la vitesse de 120 kt afin d'arriver à bon port et à l'heure ? (cf éléments de correction dans l'annexe)



Piste de prolongement



On peut reprendre encore les mêmes questions en modifiant la vitesse de l'avion. En effet, autant il est intuitif pour un élève que l'angle de dérive dépend de l'angle du vent et de la vitesse du vent, autant il n'est pas évident que l'angle de dérive dépende de la vitesse de l'avion.

Un avion se dirigeant vers le nord à la vitesse $\vec{a}$ de 180 kt (nœuds) doit faire face à un vent provenant de la direction NW, à la vitesse de 60 kt, symbolisé par le vecteur $\vec{v}$ (1 kt vaut environ 1,85 km/h). On demande de calculer l'angle de dérive de l'avion ainsi que la nouvelle vitesse de l'avion.

La situation peut être modifiée en utilisant la dérive d'un bateau soumis à des courants marins.

Quelques éléments sur l'histoire des vecteurs et du produit scalaire

Concernant l'histoire des vecteurs et du produit scalaire, on pourra lire le document écrit par Anne Boyé, IREM des pays de Loire, intitulé *Le produit scalaire quelle histoire ?!* support des journées nationales de l'APMEP, Laon, 2015, ainsi que le numéro HS 65 du magazine *Tangente*.

En bref, la notion de vecteur et de produit scalaire se développe dans deux grands domaines parallèlement : l'algèbre et la géométrie.

Géométrie	Algèbre
Au XVII^{e} siècle, Descartes et Pascal ont introduit tour à tour la notion de repère et ramené les problèmes de géométrie au maniement d'équations algébriques. Le mathématicien allemand Leibniz cherche à créer une algèbre sur l'ensemble des figures géométriques.	
En 1818, dans son ouvrage *Le calcul barycentrique*, August Ferdinand Möbius, introduit le concept de ***segment orienté* AB**, auquel on attribue une mesure (algébrique).	Au début du XIX^{e} siècle Argand travaille sur la représentation des nombres imaginaires par des lignes dirigées (équivalente à la représentation en module et argument).
G.G. Coriolis (1792-1843) définit la **notion de travail** en 1826. Le travail est « le produit du chemin parcouru et de la force dans le sens de ce chemin ».	
En 1828, C.V. Mourey introduit la notion de **chemin** (« voyage de A en B ») et le théorème de « Chasles » et rejoint ainsi la représentation des nombres complexes d'Argand. Des calculs sont possibles sur les « chemins ».	
	Hamilton (1805-1865) cherche à étendre les nombres complexes à la dimension 3 (en traduisant les transformations de l'espace par des opérations sur les objets) mais ne réussit pas. Il invente un ensemble de nombres appelés les quaternions, composés d'une grandeur scalaire et d'une quantité qu'il appelle « vecteur », en partie liés à des nombres complexes. Il crée, en définissant les opérations sur cet ensemble, des grandeurs dont une qui est l'opposé du produit scalaire actuel de deux vecteurs.
Giusto Bellavitis(1803-1880) développe la *théorie des équipollences* en 1833 et des calculs sur « les droites équipollentes » (qui reviennent à des opérations sur les nombres complexes).	

Géométrie	Algèbre
Le physicien prussien H. Grassman développe des idées similaires en 1832 (opérations sur des droites).	
	En 1873, Maxwell montre l'importance et l'utilité des vecteurs de Hamilton pour la physique.
Peano reprend l'idée d'équipollence et celles de Grassman en 1888, il définit le *« produit scalaire »* de deux segments (a.b=ab cos(angle ab)).	
	L'américain W. Gibbs(1839-1903) étudie l'analyse vectorielle et introduit le point pour la notation du produit scalaire.

En mathématiques, jusqu'en 1930, c'est le point de vue des matrices et des coordonnées qui prédomine.

Le mot scalaire désigne les éléments du corps de base d'un espace vectoriel. La racine indo-européenne « skand » signifie « lever le pied ». Naturellement elle se trouve en latin sous la forme scandere (monter) et « scala » (échelle). L'adjectif « scalaris » qualifie en latin ce qui et relatif à l'échelle et son utilisation en mathématique vient de l'analogie entre les nombres et les barreaux d'une échelle. (source: magazine *Tangente* n°65)

Ressource pour voir des produits scalaires dans divers contextes

1. Le produit scalaire permet d'exprimer la **puissance** d'une force $\vec{F}$ sur un objet se déplaçant à une vitesse $\vec{V}$ et on a la puissance P qui s'exprime comme le produit scalaire $P = \vec{V}.\vec{F}$.

2. **La covariance** de deux séries x$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et y$(y_1, y, \dots, y_n)$ (de taille n) est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

On pourra se référer au document : *Introduction à la statistique exploratoire* de Edouard Pauwels, cours de L3, des pages 21 à 27, complété par le chapitre 6 concernant l'analyse en composantes principales.

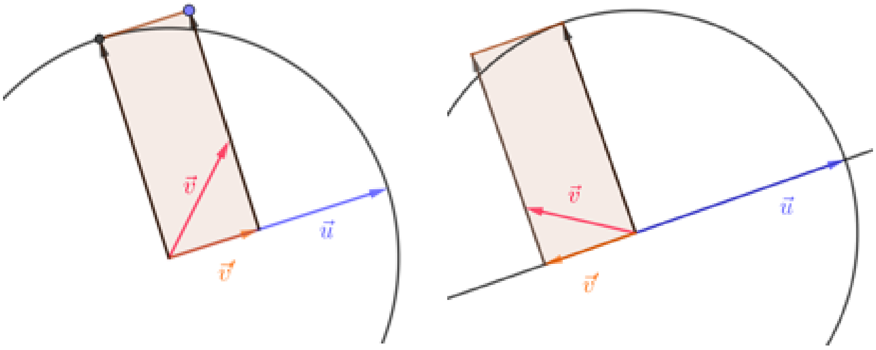
Le **coefficient de corrélation** est le cosinus de l'angle formé par les vecteurs $x - \bar{x}$ et $y - \bar{y}$ des deux séries statistiques x et y (en élargissant la définition du cosinus de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^n$). Plus ce coefficient est proche de 1 en valeur absolue, plus les deux vecteurs sont proches d'une situation de colinéarité, donc un ajustement affine est justifié.

La droite d'ajustement $y = ax + b$ est celle qui permet de minimiser la somme des carrés des écarts des valeurs observées y_i à celles données par la droite $ax_i + b$ et on a : $a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X)}$ et $b = \bar{y} + a\bar{x}$.

3. Le produit scalaire est utilisé en sociologie dans l'analyse factorielle des correspondances. Cette théorie dépasse largement le niveau de première mais il est intéressant de montrer à tous que le produit scalaire n'est pas un outil utile en mathématiques et en physique seulement, mais qu'il intervient aussi en économie. Ainsi, ceux qui se destinent à des études dans des domaines de l'économie, de la sociologie, pourront s'appuyer sur l'image mentale des projections et des produits scalaires.

Pour une première approche, on peut se reporter à un article de Philippe Cibois dans le magazine *Tangente*, n°175, mars-avril 2017, p 38 et 39, qui explique comment l'analyse des correspondances d'un tableau croisé de données amène à l'élaboration d'un graphique, dans lequel le produit scalaire de vecteurs donne une « conjonction » ou une « opposition » entre deux critères. Pour aller plus loin, on peut consulter le document *Principe de l'analyse factorielle* du même auteur.

4. On peut donner une **interprétation géométrique** au produit scalaire.

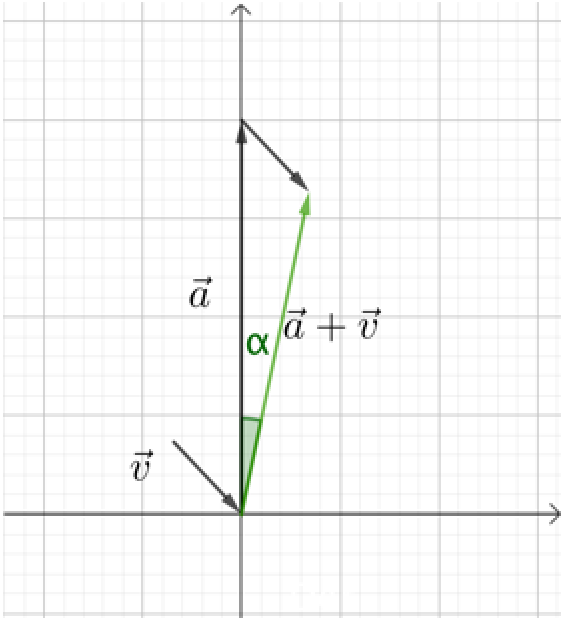


Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ peut être interprété comme l'aire positive du polygone en couleur. Dans le cas où l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est obtus, leur produit scalaire correspond à l'opposé de l'aire du polygone en couleur.

La visualisation du cas du produit scalaire nul est alors immédiate ainsi que le cas du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ qui est l'aire d'un carré.

ANNEXE : calcul de dérive d'avion et correction de trajectoires

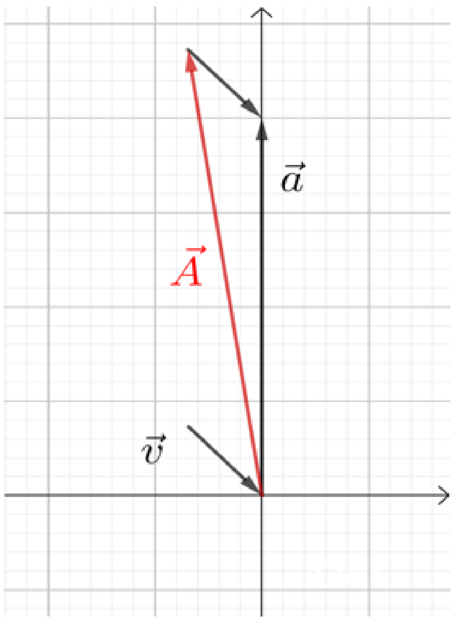
Il est possible de travailler sur le dessin, en effectuant des mesures, puis sur GeoGebra.



1) La vitesse réelle de l'avion correspond à la norme de $\vec{a}+\vec{v}$: on utilise la formule d'Al-Kashi (on obtient une vitesse de 95,2 nœuds environ)

Enfin, il faut chercher à avoir une dérive précise car sur des centaines de kilomètres parcourus, une dérive trop approximative peut avoir des conséquences désagréables voire dramatique.

On recourt au calcul grâce encore à la formule d'Al-Kashi (on obtient 9 degrés de dérive)



2) Afin de corriger sa trajectoire, le pilote doit programmer une nouvelle vitesse $\vec{A}$ telle que $\vec{A}+\vec{v}=\vec{a}$. On calcule la nouvelle vitesse : environ 146,7 kt et un angle de correction de 5,9 degrés, ce qui donne un cap de 354.