SUITES, EXPONENTIELLE, PROBABILITÉS

MODÉLISER ET REPRÉSENTER

Préambule

Les élèves choisissant l'enseignement de spécialité de mathématiques ont des profils variés, que ce soit dans leur maîtrise des notions travaillées antérieurement ou dans leur projet d'orientation en construction. Différencier son enseignement en fonction des rythmes d'apprentissage et des besoins de chacun est une fois de plus une nécessité. Pour la mise en œuvre des situations proposées, chaque enseignant doit garder à l'esprit les quatre conditions de la réussite pour faire réussir les élèves dégagées lors de la conférence de consensus de mars 2017 organisée par le Cnesco et l'Ifé/ENS de Lyon et intitulée : « Différenciation pédagogique : comment adapter l'enseignement pour la réussite de tous les élèves ? » :

- un temps d'apprentissage ajusté aux rythmes d'apprentissage des élèves, « *Aucun élève ne progresse à la même vitesse mais chacun doit avoir accès aux savoirs essentiels, cruciaux* » ;
- un rapport adéquat entre l'élève et l'école, « *partir de ce que les élèves savent* […] *pour les amener vers de nouveaux savoirs et compétences* » ;
- un environnement structuré, avec des aides et des repères, « *énoncé clair des objectifs de l'enseignement, synthèses régulières, retours aux consignes, bilan de ce qui a été appris…* » ;
- des situations d'apprentissage limitant les informations inutiles, « *épurer (les) documents* […] *pour centrer les élèves sur les enjeux principaux de l'apprentissage* ».

Autour de situations aux enjeux et modalités variées, le document propose un parcours d'apprentissage associé aux contenus et capacités attendues de trois parties du programmes « suites numériques, modèles discrets », « fonction exponentielle » et « probabilités conditionnelles et indépendance » et aux compétences mathématiques « modéliser » et « représenter ». Ces notions mathématiques et ces compétences sont parmi les plus importantes pour la formation de tous les élèves de la spécialité mathématiques de première, notamment de ceux qui s'intéressent aux sciences sociales, à l'économie ou à la biologie.

Les situations d'apprentissage partent d'objets ou d'images permettant aux élèves une découverte de la notion dans un domaine conceptuel familier pour ensuite passer de représentations intuitives à de nouveaux savoirs et compétences disciplinaires abstraits. Le triptyque manipuler-verbaliser-abstraire du rapport « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques » est un fil conducteur pour comprendre les enjeux des nouvelles notions et s'outiller de savoirs et de savoirs faire pour les mobiliser dans la résolution de problèmes.

La modélisation ne se limite pas à la traduction en langage mathématique de situations, elle nécessite de choisir le modèle et pour cela de se construire un corpus d'outil de modélisation et d'en avoir une vision comparative. Associer aux modèles une représentation contribue à l'appropriation des outils de modélisation. Autour de phénomènes discrets ou continus, il s'agit notamment d'observer l'évolution et de l'approcher par un modèle linéaire, exponentiel, exponentiel plafonné… Comprendre les raisons de ce choix permet de valider ou invalider la modélisation. C'est un enjeu de formation citoyenne pour différencier les intuitions, croyances ou opinions des démarches scientifiques étayées.

Modéliser un phénomène discret

Les motifs géométriques pour des situations accessibles à tous

Objectifs

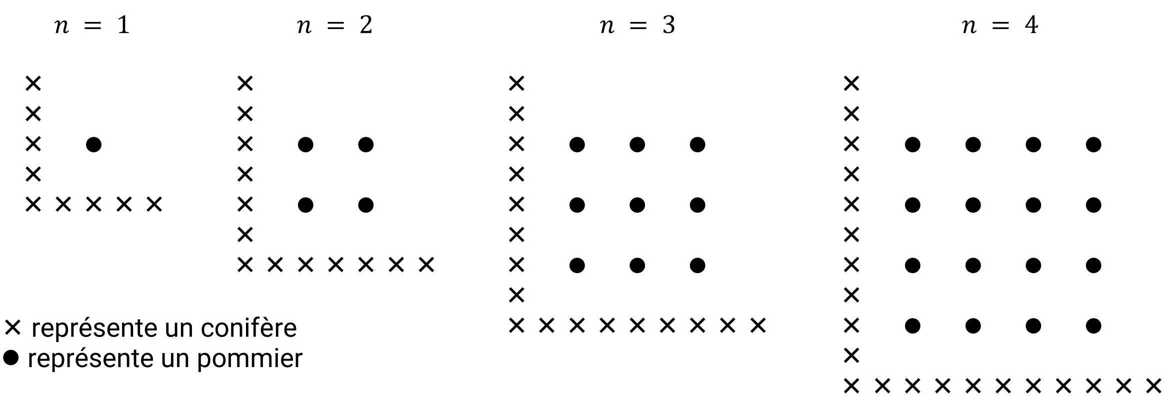
- Modéliser un phénomène discret sur une situation que chaque élève peut s'approprier facilement
- Mettre en place les différents modes de génération d'une suite

Les motifs géométriques permettent aux élèves de rester dans un domaine conceptuel familier. La situation est facilement appréhendée et la verbalisation assez aisée. Il est important que tous les élèves rencontrent rapidement des systèmes discrets de référence, qu'ils s'engagent dans une recherche, qu'ils manipulent, qu'ils développent leur confiance en eux, qu'ils essaient des pistes, qu'ils prennent le risque de se tromper… L'étape de la langue naturelle pour décrire la situation et la méthode de résolution est une étape vers l'abstraction et l'appropriation progressive des notations.

Situation 1 - les pommiers

Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres contre les vents dominants, il plante des conifères sur deux côtés du verger.

Vous pouvez voir ci-dessous un schéma présentant cette situation, avec la disposition des pommiers et des conifères pour un nombre n de rangées de pommiers :



× représente un conifère
● représente un pommier

1. Combien de conifères seront utiles pour protéger 10 rangées de pommiers ?
2. Le nombre de pommiers peut-il dépasser le nombre de conifères ? Le doubler ? Le quintupler ?

Scénario pédagogique

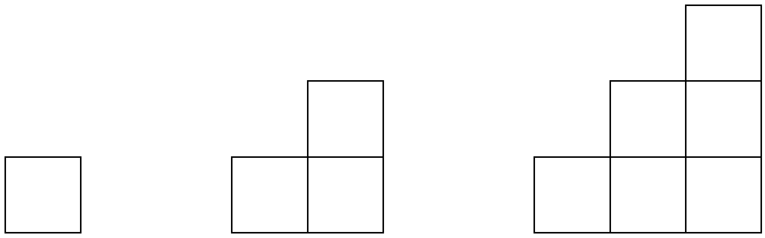
Cette activité s'appuie sur un item libéré des évaluations PISA de 2000 et 2003. L'énoncé est court, il n'induit pas la méthode. Pour faire correspondre le nombre de rangées de pommiers avec d'une part, le nombre de conifères et, d'autre part, le nombre de pommiers, les élèves mobilisent leurs connaissances sur les fonctions, ce qui conduit aux notations $u(n) = 4n + 5$ et $v(n) = n^2$. Les démarches pour trouver $u(10)$, « il faut 4 conifères de plus à chaque étape », permettent de définir une suite par une relation de récurrence.

L'utilisation d'un tableur pour observer l'évolution conduit à comparer deux croissances, l'une plus rapide que l'autre, (linéaire et polynomiale), avec une visualisation graphique.

Situation 2 - Motif en escalier

Rémy réalise un motif en escalier en utilisant des carrés. Il suit les étapes suivantes :

Comme on peut le voir, il utilise un carré à l'étape 1, trois carrés à l'étape 2 et six carrés à l'étape 3.



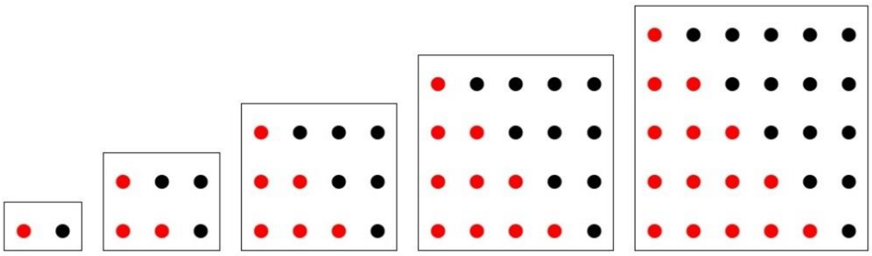
1. Combien de carrés devra-t-il utiliser à l'étape 10 ?
2. À partir de quelle étape a-t-on besoin de plus de 1000 carrés ?

Scénario pédagogique

Cette activité s'appuie elle aussi sur un item libéré des évaluations PISA de 2000 et 2003. L'énoncé est court, il n'induit pas la méthode. « Rémy ajoute 2 carrés à l'étape 2, puis trois carrés à l'étape 3 » pose un premier jalon pour la somme des entiers consécutifs et donne une relation de récurrence délicate $u(n) = u(n-1) + n$ ou $u(n+1) = u(n) + n + 1$, qui demande un temps d'appropriation important. Le motif en escalier offre une image et une verbalisation pour y revenir régulièrement « Rémy ajoute n carrés au motif précédent ».

L'utilisation d'un algorithme permet de résoudre ce premier problème de seuil.

Situation 3 – Les nombres oblongs



Si 2 billes permettent de réaliser le premier motif, il en faut 6 pour le deuxième, 12 pour le troisième, 20 pour le quatrième…

1. Combien de billes sont nécessaires pour réaliser le vingtième motif ?
2. Quel motif nécessite 2070 billes ?

Scénario pédagogique

Cette situation est intéressante pour un travail personnel permettant un retour sur un travail effectué en classe autour des deux premières situations. Les nombres oblongs, produits de deux entiers naturels successifs et les nombres triangulaires sont de bons supports pour la démonstration de la somme des premiers entiers naturels (un nombre oblong est le double d'un nombre triangulaire).

Les motifs géométriques pourront être repris tout au long du travail mené sur les suites.

Les motifs géométriques peuvent être des segments, les flocons de Von Koch…

Illustration du modèle discret dans les autres disciplines

> **Objectifs**
> Modéliser des situations rencontrées dans les autres enseignements de spécialité
> Mettre en place les différents modes de génération d'une suite
> Comprendre et construire un « outil du consommateur »
> Utiliser un tableur ou un programme

Dans son choix, l'élève a associé l'enseignement de spécialité de mathématiques à d'autres disciplines. La modélisation favorise les liens entre elles.

Situation 4 – « Éteindre » sa dette

Leonard Euler dans son ouvrage «Introduction à l'analyse infinitésimale » proposait des exemples pour les outils mathématiques qu'il exposait (page 81) :

EXEMPLE II.

Un particulier doit 400000 florins, dont il eſt convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent; il acquitte tous les ans 25000 florins; on demande après combien d'années ſa dette ſera entierement éteinte.

Scenario pédagogique

Le site Gallica de la BNF offre la possibilité de travailler sur des extraits de livres anciens. La solution proposée par Euler avec les logarithmes n'est pas accessible aux élèves de première. En revanche, l'utilisation des outils logiciels permet d'obtenir le résultat de 33 années et de revenir sur les différents modes de générations d'une suite.

Situation 5 - Taux d'intérêt nominal et taux d'intérêt réel

> **Références au programme de sciences économiques et sociales de première**
> Lecture et interprétation :
> Valeur nominale, valeur réelle (notamment, taux d'intérêt nominal et taux d'intérêt réel)

Le site La Finance Pour Tous apporte des éclairages aux enseignants de mathématiques sur ces notions. Le taux d'intérêt réel est calculé en tenant compte à la fois de l'augmentation liée au taux d'intérêt nominal (taux inscrit dans le contrat de prêt) et à la dépréciation liée à l'inflation. Il est souvent calculé approximativement :

taux d'intérêt réel (ir) = taux d'intérêt nominal (in) – taux d'inflation (t).

La formule $ir = [(1 + in)/(1 + t)] - 1$ est parfois appelée formule « rigoureuse ».

Je prête 200 € pour 12 ans. Le taux d'intérêt nominal est de 6 %, le taux d'inflation moyen est de 2 %. Combien aurais-je gagné en € courants ? en € constants ?

Scénario pédagogique

La situation ne pose pas de difficultés mathématiques. L'appropriation du langage spécifique de la discipline peut en poser :

- **en euros courants**, la *somme rendue* sera de 402,44 €, elle a augmenté de 101,22 % par rapport à la *somme prêtée* (et non pas de 72 %...). En euros constants, on ne s'intéresse qu'à la somme « sonnante et trébuchante » rendue au prêteur.
- Si on prend en considération l'érosion monétaire, on parle d'**euros constants,** et on applique le taux d'intérêt réel, calculé rigoureusement (3,92 %) ou approximativement (4 %).

Cet exercice peut conduire à des questions du type « une fois le contrat de prêt conclu, l'inflation favorise-t-elle les créanciers ou les débiteurs ? », « quand les anticipations d'inflation sont fortes, les prêteurs vont proposer des taux plus élevés ou plus bas ? »

Situation 6 - Tableau d'amortissement

Afin d'acquérir un bien immobilier, madame et monsieur Martin démarchent deux banques pour contracter un emprunt d'un montant de $180\ 000$ €.

Banque Alpha	Banque Bêta
Taux d'intérêt : 4,8 % Assurance offerte	Taux d'intérêt : 4,5 % hors assurances Assurance obligatoire : 50 € /mois

Estimant à $1\ 200$ € par mois leur capacité de remboursement, ils veulent connaître le coût total du crédit pour chaque banque. La banque Alpha met à leur disposition un tableau d'amortissement automatisé.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2			Tableau d'amortissement					
3								
4		Montant de l'emprunt en euros :				180 000		
5		Taux d'intérêt :				4,8%		
6		Mensualités en euros				1 200		
7		Montant mensuel de l'assurance en euros				0		
8								
9	Numéro de la mensualité	Montant de la mensualité en euros	Montant de l'assurance en euros	Amortissement en euros	Montant en euros du capital emprunté remboursé	Intérêts en euros		Capital restant dû après paiement en euros
10						Intérêts	Intérêts cumulés	
11	1	1 200	0	480,00	480,00	720,00	720,00	179 520,00

A – Comprendre le tableau d'amortissement

Le tableau d'amortissement présente le montant des intérêts qui correspondent à la rémunération de la banque sur la dette restante, que l'emprunteur s'acquitte à chaque échéance. Le restant de la mensualité est consacré au remboursement du crédit (l'amortissement) et au paiement mensuel de l'assurance.

1. L'intérêt mensuel est égal au douzième de $4{,}8\%$ du capital restant dû avant le versement de la n-ième mensualité, retrouver par le calcul le montant indiqué dans la cellule F11.
2. La mensualité versée chaque mois se compose du montant de l'assurance, du montant de l'amortissement du capital restant dû et du montant d'un intérêt mensuel.

   a. Retrouver par le calcul les montants indiqués dans les autres cellules de la ligne 11
   b. Compléter la ligne 12 de la deuxième mensualité du tableau d'amortissement.
3. Quelle banque madame et monsieur Martin ont-ils intérêt à choisir ?

B – Modélisation de la situation par les suites

Pour la banque Alpha et pour chaque mensualité n, on observe les évolutions de l'intérêt mensuel u_n, de l'amortissement v_n et du capital restant dû c_n.

1. En s'appuyant sur les calculs de la partie A,
   a. Etablir des relations entre u_n, v_n et c_n.
   b. Montrer que $v_{n+1} - v_n = 0{,}004(c_{n-1} - c_n)$.
2. Parmi ces trois suites (u_n), (v_n) et (c_n), laquelle semble géométrique ? Justifier cette conjecture.
3. Écrire un algorithme déterminant le nombre de mensualités du prêt.

Scénario pédagogique

Cette activité suppose l'utilisation de logiciels par tous les élèves.

La partie A peut faire l'objet d'un travail de groupes afin de faciliter la compréhension de l'énoncé.

La partie B sera l'occasion de réinvestir les connaissances des élèves sur les suites géométriques et de travailler les algorithmes de détermination de seuils.

Le calcul proportionnel de l'intérêt mensuel peut être discuté dans un second temps.

Situation 7 : Quelle limite au progrès de l'espérance de vie ?

Les démographes ont régulièrement essayé de prévoir le niveau au-delà duquel l'espérance de vie ne pourra plus augmenter. Historiquement, comme le montre l'article de J. Vallin et F. Meslé « Espérance de vie : peut-on gagner trois mois par an indéfiniment ? » paru dans le bulletin de l'INED [Population et Sociétés, n° 473, décembre 2010](), les limites établies par des démographes ont été régulièrement invalidées par leur franchissement dans différents pays. Cette question donne lieu à différentes modélisations sans cesse réinterrogées par les progrès.

L'observation de l'évolution de l'espérance de vie la plus élevée atteinte chaque année de 1841 à 2000 par le pays le plus avancé (femmes suédoises en 1841 et japonaises en 2000) montre une série de points presque alignés correspondant à une augmentation de trois mois par an.

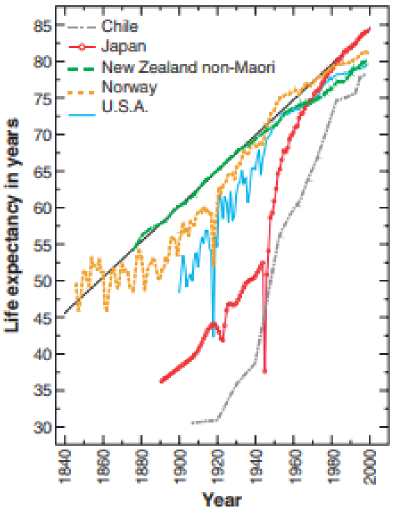


Fig. 2. Female life expectancy in Chile, Japan, New Zealand (non-Maori), Norway, and the United States compared with the trend in record life expectancy.

Source : Brokenlimits to life expectancy », J. Oeppen et J. W. Vaupel- Science mag 2002

On pose $u_0 = 45$, l'espérance de vie féminine en Suède en 1840.

1. Modéliser l'évolution décrite ci-dessus conduisant à une espérance de vie féminine de 85 ans au Japon en 2000
2. Selon ce modèle, en quelle année, pourrait-on observer une espérance de vie féminine nationale de 100 ans ?

Remarque : la thématique de la situation 7 (comme la théorie de Malthus évoquée plus loin) n'est cependant pas au programme de l'enseignement de spécialité de sciences économiques et sociales de première.

Modéliser un phénomène continu

Discrètes ou continues, trois modélisations courantes

L'effectif d'une population sera noté $N(t)$ à l'instant *t* (supposé continu) ou u_n à l'instant *n* si l'on discrétise le temps. La loi d'évolution de la population considérée suit la « loi de conservation » :

accroissement par unité de temps = naissances − décès ± migrations.

L'accroissement par unité de temps s'écrit $\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t}$ dans le modèle continu, ou encore $N'(t)$ si on suppose que la fonction N est dérivable, et il s'écrit $u_{n+1} - u_n$ dans le cas discret.

Chacune des modélisations essaie de décrire mathématiquement le membre de droite de l'égalité précédente par une expression pouvant dépendre à la fois du temps et de la population à cet instant.

<u>Trois modélisations courantes</u>

Hypothèses du modèle	Cas continu (N dérivable)	Cas discret
Modèle de Malthus (1798) : **croissance sans frein.** L'accroissement est proportionnel à la population	$N'(t) = aN(t)$ $(a \neq 0)$	$u_{n+1} - u_n = ku_n$ $(k > -1)$
Variante : croissance plafonnée. La population ne peut dépasser un plafond *M*, et l'accroissement est proportionnel à son écart avec le plafond	$N'(t) = a(M - N(t))$ $(a > 0)$	$u_{n+1} - u_n = k(M - u_n)$ $(0 < k < 1)$
Modèle de Verhulst (1836) ou modèle logistique. L'accroissement est proportionnel à la fois à la population et à son écart avec une constante positive *M*, qui peut être un plafond ou non.	$N'(t) = aN(t)(M - N(t))$ $(a > 0)$	$u_{n+1} - u_n = ku_n(M - u_n)$ $(0 < k < 1)$

Les exemples interdisciplinaires foisonnent : évolution de populations vivantes ou de populations de particules (désintégration, ...), de maladies, d'absorption ou d'élimination de substances...

Dans ce document, on se contentera d'illustrer le Modèle de Malthus avec la situation 1 et le modèle de la croissance plafonnée avec la situation 2.

Evolution de populations

Il s'agit ici de proposer une activité en lien avec l'enseignement scientifique conduisant à la construction d'un modèle discret et d'un modèle continu de l'évolution d'un nombre d'atomes de carbone 14 tout en explicitant le passage du modèle discret au modèle continu.

Références au programme de l'enseignement scientifique de la classe de première

Objectifs d'apprentissage concernant une longue histoire de la matière

Savoirs :

Certains noyaux sont instables et se désintègrent (radioactivité). L'instant de désintégration d'un noyau radioactif individuel est aléatoire. La demi-vie d'un noyau radioactif est la durée nécessaire pour que la moitié des noyaux initialement présents dans un échantillon macroscopique se soit désintégrée. Cette demi-vie est caractéristique du noyau radioactif.

Savoir-faire :

Calculer le nombre de noyaux restants au bout de n demi-vies Estimer la durée nécessaire pour obtenir une certaine proportion de noyaux restants. Utiliser une représentation graphique pour déterminer une demi-vie. Utiliser une décroissance radioactive pour une datation (exemple du carbone 14).

Le site du Commissariat à l'énergie atomique apporte des éclairages sur ces notions.

Situation 1 – Datation au carbone 14

Objectifs

Mobiliser en situation les acquis sur les suites géométriques

Passer d'un modèle discret à un modèle continu

Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux comportent environ mille milliards d'atomes de carbone 12 pour 1 atome de carbone 14. À leur mort, l'assimilation en carbone 14 cesse et celui-ci se désintègre. Le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps, d'environ 0,121 % par décennie, alors que le nombre d'atomes de carbone 12 n'évolue pas.

Partie A : Utilisation d'un modèle discret

1. Il a été découvert cette année en Sibérie des restes osseux d'un mammouth.

Une étude a permis d'établir qu'un fragment osseux de ce dernier comptait 1 atome de carbone 14 pour 40 mille milliards d'atomes de carbone 12.

Déterminer à dix ans près le nombre d'années nous séparant de sa mort.

2. On admet que l'on peut ainsi estimer l'âge de fossiles ou de fragments osseux qui contiennent au moins 0,3 % du carbone 14 initial.

Déterminer à l'aide d'un tableur l'âge maximum que l'on peut estimer.

3. Pour tout entier naturel n, on note u_n la proportion du carbone 14 initial restant dans un fragment osseux ou dans un fossile au bout de n décennies. Ainsi $u_0 = 1$.

On considère le programme ci-dessous :

```
def carbone() :
    u = 1
    n = 0
    while u > 0.5:
        u=0.99879*u
        n= n + 1
    return n*10
```

Quel résultat affichera le programme si on entre dans la console carbone( ) ?

Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

4. La demi-vie d'un noyau radioactif, comme celui d'un atome de carbone 14, est la durée nécessaire pour que la moitié des noyaux initialement présents dans un échantillon macroscopique se soit désintégrée. En raison de l'absence de vieillissement, cette demi-vie, caractéristique du noyau considéré, est indépendante de l'instant initial.

On admet que la demi-vie du noyau radioactif de carbone 14 est T = 5730 ans.

a) Montrer qu'au bout de 2T années, le nombre initial d'atomes de carbone 14 a été divisé par 4.
b) Pour k entier naturel, montrer qu'au bout de kT années, le nombre initial d'atomes de carbone 14 a été divisé par 2^k.

Partie B : Utilisation d'un modèle continu

La proportion du carbone 14 initial restant dans les tissus animaux et végétaux diminue d'environ 0,121 % par décennie, ce qui a été modélisé à l'aide de la suite (u_n) définie en A.3 et telle que :

$\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n} = -\,0{,}121\ \%$, pour tout entier $n \geq 1$

c'est-à-dire, $u_{n+1} - u_n = -0{,}00121\, u_n$, pour tout entier $n \geq 1$.

La variation de la suite à chaque décennie est ainsi proportionnelle à la suite.

Une modélisation continue met en correspondance un réel positif t avec la proportion $p(t)$ du carbone 14 initial restant dans un tissu animal ou végétal t décennies après sa mort.

Pour cette fonction p, la variation entre deux instants t et $t+h$ est proportionnelle à h et à $p(t)$:

$$\frac{p(t+h)-p(t)}{h} = -0{,}00121\, p(t) \text{ , pour } t \in [0\,;+\infty[$$

La fonction p est ainsi la fonction dérivable sur $[0\,;+\infty[$ telle que $p' = -\,0{,}00121p$ et $p(0) = 1$.

1. L'objectif de cette première question va être de tracer une représentation graphique approchée de la fonction p par la méthode d'Euler.

a) On place le point $A_0\,(0;1)$, puis on trace la tangente à la courbe en ce point. Un pas h étant fixé, on place le point A_1 d'abscisse h de cette tangente, qui est un point proche du point de même abscisse de la courbe représentative de p. On trace la droite passant par A_1 et de coefficient directeur $p'(h)$ pour obtenir le point A_2 d'abscisse $2h$… Cette méthode permet d'obtenir une suite (A_n) de points.

Démontrer que la suite (x_n) des abscisses de ces points est arithmétique, alors que la suite (y_n) des ordonnées est géométrique.
Exprimer x_n en fonction de n et y_n en fonction de n.

b) Déterminer une approximation de $p(573)$et de $p(3047)$ en choisissant successivement comme pas 1 puis 0,1, puis 0,01. Les résultats obtenus sont-ils cohérents avec ceux de la partie A ?

2. On considère le programme ci-dessous :

```
import matplotlib.pyplot as plt

def courbe(h) :
    M = int(4800/h) + 1
    abscisses=[0]
    ordonnees=[1]
    x=0
    y=1

    for i in range(M+1) :
        x=x+h
        y=y*(1-0.00121*h)
        abscisses.append(x)
        ordonnees.append(y)

    plt.plot(abscisses,ordonnees,'-')
    plt.show()
```

Que va renvoyer le programme si on saisit dans la console courbe(0.1) ?

3. Modifier le programme précédent afin qu'il permette aussi d'afficher une valeur approchée de la demi-vie du carbone 14 et une valeur approchée du nombre d'années nous séparant de la mort du mammouth de la question 1) de la partie A.

4. Saisir le programme suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def courbe(h) :
    M = int(4800/h) + 1
    abscisses=[0]
    ordonnees=[1]
    x=0
    y=1

    for i in range(M+1) :
        x=x+h
        y=y*(1-0.00121*h)
        abscisses.append(x)
        ordonnees.append(y)

    plt.plot(abscisses,ordonnees,'-',label="Approximation de p")
    x1 = np.linspace(0, 4800, 4800)
    y1 = np.exp(-0.00121*x1)
    plt.plot(x1, y1, "r--", label="exp(-0.00121t)")
    plt.xlabel("Nombre de décennies")
    plt.ylabel("proportion de carbone 14 restant")
    plt.legend()
    plt.show()
```

Tester la fonction courbe pour des valeurs de h de plus en plus petites.

Quelle conclusion peut-on faire ?

5. Un échantillon de matière organique contient 15 grammes de carbone 14. Quelle masse de carbone 14 contiendra ce même échantillon dans 100 ans puis dans 2019 ans ?

Scénario pédagogique

Cette activité suppose l'utilisation de logiciels par tous les élèves.

Il faudra prévoir une fiche méthode sur la méthode d'Euler à la partie B (Voir Annexe 3).

Prolongements possibles

En 1798, Thomas Robert Malthus (1766 - 1834), un économiste britannique, publie un essai dans lequel il émet l'hypothèse que l'accroissement de la population est beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires.

« Je pense pouvoir poser franchement deux postulats : premièrement, que la nourriture est nécessaire à l'existence de l'homme ; deuxièmement, que la passion réciproque entre les sexes est une nécessité et restera à peu près ce qu'elle est à présent. Je dis que le pouvoir multiplicateur de la population est infiniment plus grand que le pouvoir de la terre de produire la subsistance de l'homme. »

« Si elle n'est pas freinée, la population s'accroît en progression géométrique. Les subsistances ne s'accroissent qu'en progression arithmétique… Les effets de ces deux pouvoirs inégaux doivent être maintenus en équilibre par le moyen de cette loi de la nature qui fait de la nourriture une nécessité vitale pour l'homme. »

Essai sur le principe de population, 1798.

Il en conclut le caractère inévitable de catastrophes démographiques, à moins de limiter la croissance de la population.

La théorie de Malthus est basée sur une augmentation « géométrique » de la population et « arithmétique » de la nourriture.

Absorption ou élimination de substances

Objectifs
Mobiliser en situation les acquis sur les suites géométriques
Passer d'un modèle discret à un modèle continu
Motiver la nécessité de modéliser un phénomène pour résoudre un problème
Utiliser des algorithmes de seuil et de dichotomie

Il s'agit ici de proposer une activité en lien avec l'enseignement de spécialité de sciences et vie de la terre conduisant à la construction d'un modèle discret et d'un modèle continu de l'évolution d'une quantité d'analgésique dans l'organisme d'un patient.

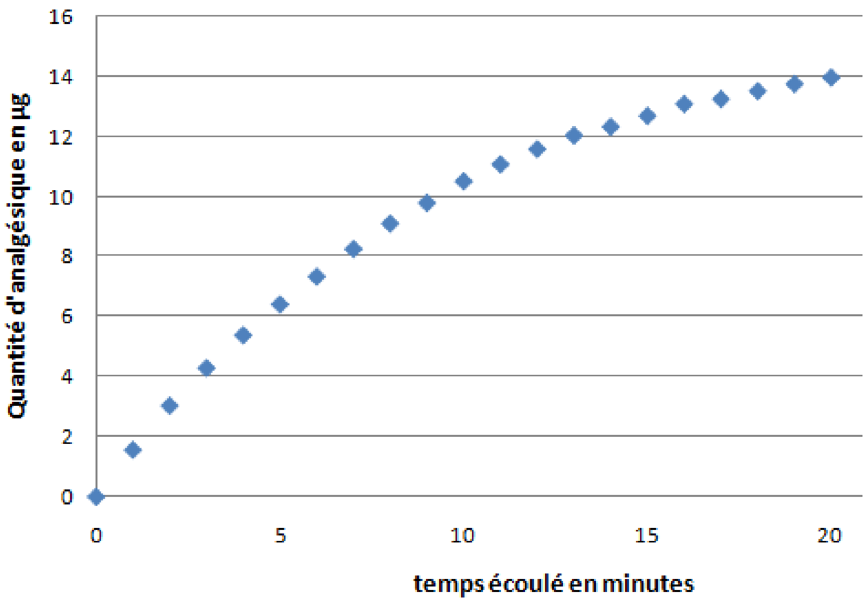
Référence au programme de sciences de la vie et de la Terre de la classe de première
Les écosystèmes : des interactions dynamiques entre les êtres vivants et entre eux et leur milieu.
Ces interactions structurent l'organisation (biodiversité de l'écosystème), l'évolution (dynamique des populations) et le fonctionnement de l'écosystème (production, flux de matière et réservoirs, recyclage de la matière organique, etc.).

Situation 2 - dosage d'un analgésique

Au cours d'une anesthésie générale, afin de soulager la douleur du patient, l'anesthésiste décide d'administrer un analgésique au moyen d'une perfusion à débit continu. L'anesthésiste souhaite arrêter la perfusion lorsque la quantité de cet analgésique présente dans l'organisme du patient aura atteint le seuil de 15 µg.

Le nuage de points ci-dessous donne la quantité d'analgésique exprimée en µg présente dans l'organisme du patient en fonction du temps t écoulé exprimé en minutes.

Durée en minutes	Quantité d'analgésique en µg
0	0
1	1,568
2	3,04
3	4,293
4	5,392
5	6,421
6	7,347
7	8,264
8	9,113
9	9,801
10	10,525
11	11,089
12	11,596
13	12,052
14	12,34
15	12,706
16	13,1
17	13,265
18	13,53
19	13,769
20	13,984



Partie A : utilisation d'un modèle discret

On souhaite modéliser la situation à l'aide d'une suite. On note $q(n)$ la quantité d'analgésique en µg présente dans l'organisme du patient au bout de n minutes et on souhaite ainsi trouver une suite (u_n) telle que $u_n \approx q(n)$ pour n entier compris entre 0 et 20.

1. Expliquer pourquoi le choix d'une suite arithmétique ou géométrique n'est pas pertinent.

2. Montrer que la progression que suivent les nombres $16 - q(0), 16 - q(1), 16 - q(2)$ ... est proche d'une progression géométrique.

3. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$16 - q(n)$									
$q(n+1) - q(n)$									

Pourquoi est-il raisonnable de dire que la vitesse moyenne d'absorption de l'analgésique par l'organisme du patient entre l'instant $t_n = n$ min et l'instant $t_{n+1} = n + 1$ min est proportionnelle à l'écart entre 16 et la quantité d'analgésique exprimée en µg présente dans l'organisme du patient à l'instant $t_n = n$ min.

4. Soit la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 0$, telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = 0{,}1(16 - u_n) \text{ et donc que } u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}6 .$$

Au regard des résultats de la question précédente, $u_n \approx q(n)$ pour tout entier naturel n.

a) Démontrer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 16 - u_n$ est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c) Ecrire un algorithme permettant de déterminer à la minute près l'instant auquel la perfusion devra être stoppée.

Partie B : utilisation d'un modèle continu

On note f la fonction qui à chaque instant t exprimé en minutes associe la quantité d'analgésique présente dans l'organisme du patient exprimée en µg à l'instant t.

1. À l'aide d'un tableur, construire le nuage de points représentant la différence entre 16 et la quantité d'analgésique exprimée en µg présente dans l'organisme du patient en fonction du temps t écoulé exprimé en minute, donnée dans le tableau de la partie A, pour t variant de 0 à 20.

Ensuite, ajouter une courbe de tendance linéaire, puis une courbe de tendance polynômiale de degré 2, et enfin une courbe de tendance exponentielle.

On notera g la fonction représentée par cette dernière courbe. Ainsi, g admet une expression algébrique de la forme $g: t \mapsto ke^{-at}$.

Après avoir constaté que la courbe de tendance exponentielle est celle qui semble le mieux modéliser la situation, donner la valeur de k arrondie à l'unité et une valeur arrondie au millième de a.

En déduire une expression algébrique de f.

2. Déterminer le sens de variation de f.

3. On considère le programme ci-dessous :

```
from math import*

def f(x) :
    return 16*(1-exp(-0.105*x))


def duree(p) :
    a = 26
    b = 27
    while b-a > p :
        m =(a+b)/2
        if f(m) < 15 :
            a = m
        else :
            b = m
    return b
```

Que va renvoyer le programme si on saisit dans la console duree(1/60)?

Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

Remarque

La quantité d'analgésique présente dans l'organisme du patient suit la loi suivante :

Si $f(t)$ est la quantité d'analgésique exprimée en µg présente dans l'organisme du patient à l'instant t exprimé en minutes, pour tout réel h tel que $t + h \geq 0$, la variation

$\Delta f(t) = f(t+h) - f(t)$ de la quantité d'analgésique présente dans l'organisme du patient entre les instants t et $t + h$ est proportionnelle à $\Delta t = t + h - t = h$ et à $16 - f(t)$. Il existe un réel $a > 0$ tel que $\Delta f(t) = a(16 - f(t))\Delta t$

Ainsi pour tout réel h non nul tel que $t+h \geq 0$, on a :

$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = a\big(16 - f(t)\big) \Leftrightarrow \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = a(16 - f(t))$$

Ainsi, si on suppose que la fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, un passage à la limite en faisant tendre h vers 0 dans l'égalité précédente permet d'aboutir à l'équation différentielle :

$$f'(t) = a(16 - f(t))$$

Ainsi $f'(t) = 16a - af(t)$

($16a$ est la vitesse d'injection de l'analgésique et $-af(t)$ la vitesse d'élimination par l'organisme à l'instant t).

$f'(t) = 16a - af(t) \Leftrightarrow 0{,}105e^{-0{,}105t} = ae^{-0{,}105t} \Leftrightarrow a = 0{,}105$

Ainsi pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0{,}1(16 - u_n)$ et pour tout $t \in [0\,;+\infty[$,

$f'(t) = 0{,}105(16 - f(t))$

Cet exercice permet donc bien d'illustrer le modèle de croissance plafonnée aussi bien dans le cas discret que dans le cas continu.

Modéliser une situation d'épreuves aléatoires successives

Du dénombrement aux probabilités conditionnelles

En seconde, les élèves ont abordé le modèle d'équiprobabilité et dénombré à l'aide d'arbres. On pourra, avant d'aborder cette partie du programme de première, revisiter les connaissances sur les probabilités de seconde à l'aide de questions flashs. Elles permettront d'aborder plus sereinement cette partie du programme.

Objectifs

S'appuyer sur ce que les élèves savent pour les amener vers de nouveaux savoirs

Introduire la notion de probabilité conditionnelle

La notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante. Le modèle de l'urne de Bernoulli et la comparaison des tirages avec et sans remise servira de cadre de référence.

Situation 1 - l'urne

Dans une urne, il y a deux boules rouges et quatre boules vertes, indiscernables au toucher. Une partie consiste à tirer au hasard, sans remise, deux boules de l'urne. La partie est gagnée si les deux boules tirées sont vertes.

1. En jouant à ce jeu, a-t-on plus de chance de perdre ou de gagner ?
2. Si l'urne contient désormais 20 boules rouges et 40 boules vertes, les probabilités sont-elles changées?
3. Les probabilités sont-elles changées si le tirage s'effectue avec remise ?

Scénario pédagogique

Cette activité ouverte favorise le passage d'un arbre de dénombrement à celle d'un arbre de probabilité conditionnelle. On pourra s'appuyer sur les productions des élèves pour les convaincre de la pertinence de la représentation à l'aide d'un arbre pondéré. Ce passage se fera progressivement. C'est la comparaison de ces différentes représentations qui permettra de justifier les règles de calculs. (*Annexe 1)*

L'étude du cas de 20 boules rouges et de 40 boules vertes impose le passage à un arbre pondéré.

L'étude du cas du tirage avec remise permet d'introduire **la notion d'indépendance**. La comparaison des deux procédés de tirage (sans et avec remise) amène à distinguer ces deux cas et à étudier une succession de deux épreuves indépendantes.

Prolongement possible

S'il y a deux boules rouges dans l'urne, quel nombre minimal de boules vertes faut-il mettre dans l'urne pour que la probabilité de gagner une partie soit supérieure à celle de perdre ?

- Lorsque le tirage s'effectue sans remise.
- Lorsque le tirage s'effectue avec remise.

Cette situation à prise d'initiatives s'appuie sur la résolution d'un problème conduisant à une inéquation du second degré (très simple quand les tirages sont avec remise).

Situation 2 - Dans la classe

Une classe de première est composée de 35 élèves, dont 24 sont demi-pensionnaires. Il y a 16 filles, dont 10 demi-pensionnaires et 19 garçons dont 14 demi-pensionnaires. On choisit un élève au hasard.

On note :

- F l'événement : « l'élève choisi au hasard est une fille » ;
- G l'événement : « l'élève choisi au hasard est un garçon » ;
- D l'événement : « l'élève choisi au hasard est demi-pensionnaire ».

1. Calculer P(D), P(F), P(G), P($F \cap D$) et P($G \cap D$).
2. Quelle est la probabilité de choisir au hasard, parmi les filles, un élève demi-pensionnaire ?
3. Quelle est la probabilité de choisir au hasard, parmi les garçons, un élève demi-pensionnaire ?

Scénario pédagogique

La résolution de cet exercice peut s'appuyer sur la représentation de la situation par un tableau. Une probabilité conditionnelle pourra alors être présentée comme une réduction de l'univers liée à l'expérience aléatoire. L'exercice peut être rendu plus attractif s'il s'appuie sur les données de la classe dans laquelle il est proposé.

L'inversion des conditionnements

Objectifs
Comprendre la problématique du conditionnement
Se détacher du modèle d'équiprobabilité
Utiliser les probabilités dans un contexte sociétal

Situation 3 - Vaccination

Un quart de la population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Survient une épidémie. On constate que, parmi les malades, on trouve en moyenne un vacciné pour quatre non vaccinés, et parmi les vaccinés un malade sur douze.

Selon vous, le vaccin est-il efficace ?

Scénario pédagogique

Il s'agit de comparer les probabilités qu'un individu soit malade selon qu'il ait été vacciné ou non.

Ce problème peut être résolu en comparant les deux arbres de probabilités conditionnelles.

- L'un conditionné par la partition « Malade », « Non Malade ».
- L'autre par la partition « Vacciné », « Non-vacciné ».

Arbres qui s'alimentent et se complètent au fur et à mesure « comme un jeu de piste ».

Dispositif pédagogique envisageable : Travail de groupe.

Temps 1 : Phase d'explicitation et de reformulation orale par les élèves afin d'assurer la compréhension de la situation par tous.

Temps 2 : Chaque groupe modélise et choisit une représentation.

Temps 3 : Confrontation des productions. Le but est de faire apparaître les deux partitions. *(Annexe 2)*

En lien avec le programme de Science et Vie de la Terre, ce problème pourrait être prolongé par un travail de modélisation de l'efficacité d'une couverture vaccinale par une fonction homographique.

Source : https://xavier.hubaut.info/coursmath/sta/vaccin.htm

Situation 4 - Dé truqué

On dispose de deux dés identiques d'aspect, dont l'un est équilibré et l'autre truqué de sorte que le 6 apparaisse avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

On prend un des deux dés au hasard. On le lance et on obtient 6.

Proposition : La probabilité que le dé lancé soit le dé truqué est égale à $\frac{2}{3}$.

Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.

Scénario pédagogique

Cet énoncé peut être rapproché de l'expérience classique de Bayes qui imagine deux urnes remplies de boules : La première contient dix boules noires et trente blanches ; la seconde en a vingt de chaque couleur. On tire sans préférence particulière une des urnes au hasard et dans cette urne, on tire une boule au hasard. La boule est blanche. Quelle est la probabilité que l'on ait tiré cette boule dans la première urne ? Intuitivement, on comprend bien qu'il est plus probable que cette boule provienne de la première urne, que de la seconde.

Il s'agit donc d'amener les élèves à prendre en compte le résultat de l'expérience pour proposer une nouvelle modélisation. *(Annexe 3)*

Situation 5 - Question taboue

Lors de la guerre du Vietnam, face aux terribles conditions du conflit, les soldats ont consommé massivement divers stupéfiants, faciles à se procurer et peu coûteux. Ce fléau de la drogue a dévasté l'armée américaine.

Dans son ouvrage « Shooting Up, a history of drugs in warfare », Lukasz Kamienski reprend les estimations de l'administration américaine publiées en 1974: 92 % des soldats déployés au Vietnam consomment de l'alcool, 69 % de la marijuana, 38 % de l'opium, 25 % des amphétamines et 23 % des barbituriques…

Principe du sondage : Pour obtenir de telles estimations, l'administration aurait utilisé un procédé de sondage brouilleur, visant à limiter le biais engendré par le caractère tabou de la question posée. Par exemple, pour évaluer la proportion de ceux qui font usage d'héroïne :

Le soldat interrogé dispose de trois cartes identiques d'aspect :

- sur l'une des cartes, une étoile est dessinée et on lit « Y a-t-il une étoile sur cette carte ? » ;
- sur la deuxième carte, il n'y a pas d'étoile et on lit « Y a-t-il une étoile sur cette carte ? » ;
- sur la troisième carte, on lit la question « taboue » « Consommez-vous de l'héroïne ? ».

Le soldat interrogé tire une carte au hasard. Le sondeur n'a pas connaissance de la carte tirée. Le soldat répond alors « oui » ou par « non », sans appréhender le regard du sondeur qui ne peut interpréter sa réponse.

Sur 1500 soldats interrogés avec ce procédé, 669 ont répondu « oui ».

Estimez la proportion de soldats qui consomme de l'héroïne.

Scénario pédagogique

Lors d'une enquête, lorsque la question est sensible, il se peut que la personne interrogée ne réponde pas avec franchise car elle appréhende le regard de celui qui pose la question. Cette activité vise à proposer un cadre où les mathématiques permettent de dépasser ce biais.

La pertinence de la modélisation ($^1/_3$ des soldats interrogés ont effectivement répondu à la question taboue) est assurée par le nombre conséquent de soldats interrogés.

Dispositif pédagogique

Préparer un jeu de carte et faire jouer brièvement les élèves en posant une question taboue dont la réponse est oui ou non.

Prolongement possible

En réalisant une enquête (une ou plusieurs questions) avec le procédé décrit dans l'activité à l'échelle de l'établissement, il est possible d'inscrire les mathématiques dans un projet climat scolaire/prévention des conduites à risque.

Variables aléatoires réelles

Objectifs
Développer une intuition autour de l'idée de nombre dépendant du hasard.
Introduire les notions de variables aléatoires et d'espérance

Situation 6 - Jeu de casino

Un gérant du casino s'interroge sur l'opportunité de proposer le jeu suivant :

Règle du jeu

- Miser 1€
- Choisir un numéro entre 1 et 6
- Lancer 2 dés

Nombre de dés donnant le numéro choisi.	Gain / (gain réel)
2	20 € / (19 €)
1	1 € / (0 €)
0	0 €/(-1 €)

Conseillez-vous au gérant du casino de proposer ce jeu ?

Scénario pédagogique

Des simulations sur tableur ou à l'aide d'algorithmes peuvent aider à appréhender les enjeux du problème et favoriser l'émission d'une conjecture.

La notion de variable aléatoire peut être introduite dans le but de faciliter les notations. La variable aléatoire G est définie comme la fonction G qui, à une partie, associe le gain réel du joueur. L'événement « Le gain réel est 19 € » s'écrit [G=19].

La réponse à la question posée permet d'introduire la notion d'espérance. Du point de vue du casino, il faut que l'espérance de gain réelle du joueur soit négative *(Annexe 5)*.

Le risque dépend du nombre de parties jouées : cette activité fournit l'occasion d'un travail expérimental permettant de comparer la moyenne d'un échantillon de taille n avec l'espérance de la variable aléatoire *(Annexe 6)*.

Prolongement possible

On peut proposer une situation similaire en complexifiant la règle :

- proposer 3 dés ;
- modifier les gains.

Règle du jeu

- Miser 1€
- Choisir un numéro entre 1 et 6
- Lancer 3 dés

Nombre de dé donnant le numéro choisi.	Gain / (gain réel)
3	100 € / (99 €)
2	2 €/ (1 €)
1	1 € / (0€)
0	0€ / (-1 €)

Approche historique et algorithmique : Monte-Carlo

Références au programme

Exemple d'algorithme

Méthode de Monte-Carlo : estimation de l'aire sous la parabole, estimation du nombre π.

Le but de cette activité est de découvrir la méthode de Monte-Carlo pour estimer une aire. Le mathématicien Von Neumann a nommé ainsi cette méthode en référence aux jeux de hasard des casinos.

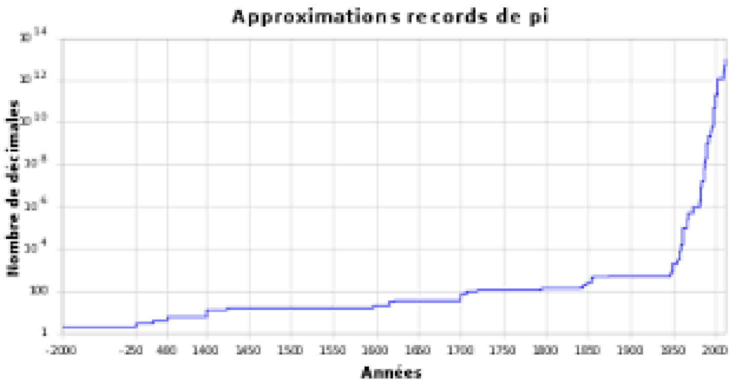
A travers cette activité, on pourra réinvestir le fait que le développement décimal d'un nombre irrationnel est infini et non-périodique. Il est donc difficile de calculer les décimales de π. Grâce à la géométrie, Archimède a découvert les deux premières décimales en utilisant des polygones inscrits et exinscrits de 96 côtés.

Dans un premier temps, il s'agit pour les élèves de comprendre et d'exploiter un algorithme de Monte-Carlo pour trouver une valeur approchée de π, valeur que l'on pourra comparer avec celle donnée par la calculatrice.

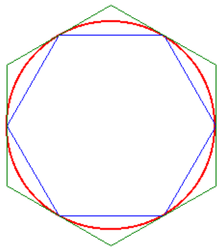
Dans un deuxième temps, il s'agit de transformer cet algorithme pour évaluer la pertinence de la formule pour calculer l'aire sous une arche parabolique proposée par Archimède.

π est un nombre irrationnel

C'est en 1761 que l'autodidacte J H Lambert a prouvé que π est un nombre irrationnel. C'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction et que son développement décimal 3.14159265359… est infini et non-périodique. L'histoire des mathématiques est étroitement liée à la recherche de plus en plus fructueuse des décimales de π.



La course aux décimales !



L'aire du disque est comprise entre l'aire de l'hexagone bleu et celle de l'hexagone vert

L'idée d'Archimède est d'encadrer un cercle donné entre des polygones réguliers inscrits et circonscrits, dont il augmente le nombre des côtés : petit à petit ces polygones viennent se coller à la circonférence, et à la limite ils coïncident avec le cercle. Il suffit de calculer les périmètres, ou les aires, de ces polygones pour obtenir des valeurs approchées de π. En utilisant des polygones de 96 côtés, il conclut que π est compris entre $\frac{223}{71}$ *et* $\frac{22}{7}$

Combien de décimales de π connaissait Archimède ?

Le 16 Octobre 2011. Les Japonais Alexander J. Yee et Shigeru Kondo ont calculé plus de 10 000 milliards de décimales de π.

Source : https://images.math.cnrs.fr/Les-decimales-de-pi.html

Une méthode originale

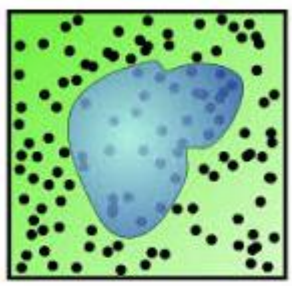
La méthode de Monte-Carlo est une méthode originale qui s'appuie sur le hasard pour estimer une aire.

Stanisław Ulam et John von Neumann l'appelèrent ainsi, en référence aux jeux de hasard dans les casinos, au cours du projet Manhattan qui produisit la première bombe atomique pendant la Seconde Guerre mondiale. Une surface inconnue peut être estimée de la façon suivante :

On l'englobe dans un domaine plus large dont l'aire est facile à calculer, un rectangle par exemple.

On génère des points au hasard dans ce rectangle.

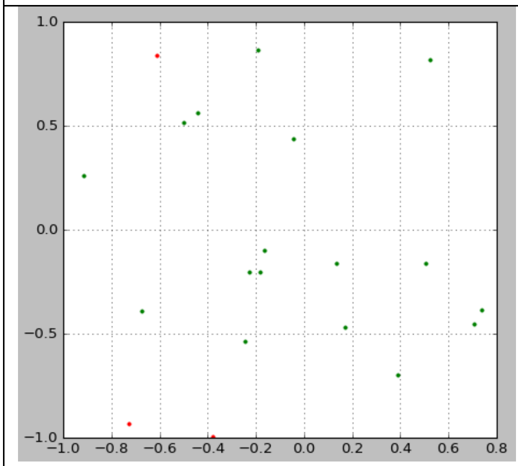
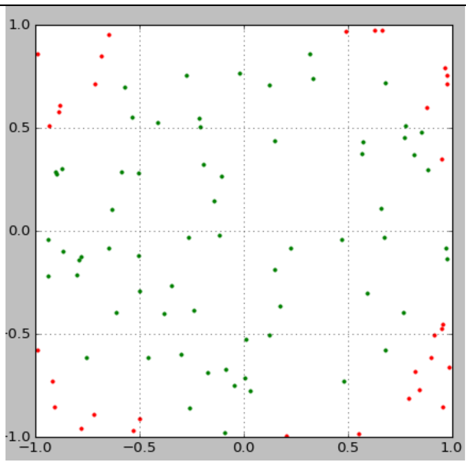
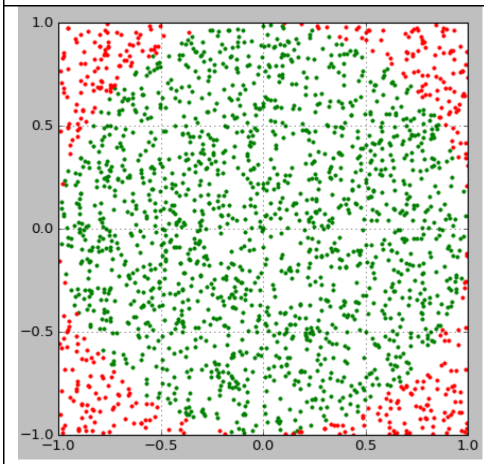
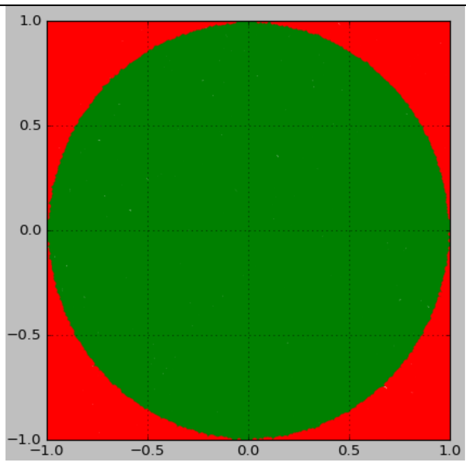
On estime l'aire de la surface inconnue par la proportion de points à l'intérieur de la surface multipliée par l'aire du rectangle.



Source : https://interstices.info/la-simulation-de-monte-carlo/

La méthode de Monte-Carlo peut être utilisée pour trouver une valeur approchée du nombre π.
L'algorithme ci-dessous permet d'illustrer cette méthode.

```
def graph_mc(n):
    X_i=[]
    Y_i=[]
    X_e=[]
    Y_e=[]
    for k in range(n):
        (x,y)=point()
        d=x**2+y**2
        if d<=1:
            X_i.append(x)
            Y_i.append(y)
        else:
            X_e.append(x)
            Y_e.append(y)
    plt.plot(X_i,Y_i,'g.')
    plt.plot(X_e,Y_e,'r.')
    plt.grid()
    plt.show()
```

20 points	100 points
	
2 000 points	100 000 points
	

Utiliser l'algorithme ci-dessous pour déterminer une valeur approchée de π.

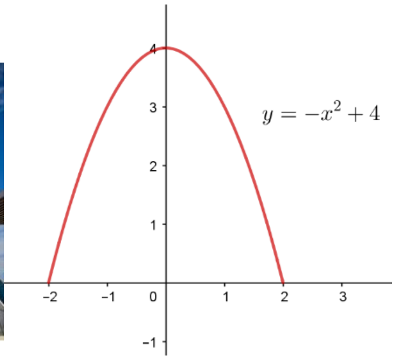
```
def point():
    x=uniform(-1,1)
    y=uniform(-1,1)
    return(x,y)

def proportion(n):
    compteur=0
    for k in range(n):
        (x,y)=point()
        d=x**2+y**2
        if d<=1:
            compteur=compteur+1
    return(compteur/n)
```

```
>>> proportion(10000000)
0.7855082
```

Archimède et les arches paraboliques

Selon Archimède l'aire de la surface (vitrée, sur la photographie) sous une arche parabolique est égale aux deux tiers de la base multipliée par la hauteur de l'arche.



Utiliser la méthode de Monté- Carlo pour estimer l'aire « sous la parabole d'équation $y = -x^2 + 4$

Que pensez-vous de l'affirmation d'Archimède ?

Cette formule se généralise-t-elle à toutes les arches paraboliques ?

Annexes

Annexe 1 - Éléments de correction de l'activité intitulée « Tableau d'amortissement »

Partie A

1. $\frac{1}{12} \times \frac{4,8}{100} \times 180\,000 = 720$

Le montant de l'intérêt mensuel de la première mensualité est donc bien 720 €.

2.a. $1200 - 720 = 480$

Le montant consacré à l'amortissement dans la première mensualité est donc bien 480 €.

$$180\,000 - 480 = 179\,520$$

Le capital restant dû après le paiement de la première mensualité est donc 179 520 €.

3. Formules pouvant être saisies dans les cellules A12, B12, C12, D12, E12, F12, G12 et H12 puis recopiées vers le bas pour obtenir le tableau d'amortissement :

Cellule	Formule
A12	= A11 + 1
B12	=SI(H11+F12+C12>F6;F6;H11+F12+C12)
C12	=SI(H11>0;F7;0)
D12	=SI(H11+F12+C12>F6;B12-F12-C12;H11)
E12	=D12+E11
F12	=H11/12*F5
G12	=G11+F12
H12	=H11-D12

On obtient le tableau d'amortissement suivant si le prêt est contracté auprès de la banque Alpha :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2			Tableau d'amortissement					
3								
4		Montant de l'emprunt en euros :				180 000		
5		Taux d'intérêt :				4,8%		
6		Mensualités en euros				1 200		
7		Montant mensuel de l'assurance en euros				0		
8								
9	Numéro de la mensualité	Montant de la mensualité en euros	Montant de l'assurance en euros	Amortissement en euros	Montant en euros du capital emprunté remboursé	Intérêts en euros		Capital restant dû après paiement en euros
10						Intérêts	Intérêts cumulés	
11	1	1 200,00	0,00	480,00	480,00	720,00	720,00	179 520,00
12	2	1 200,00	0,00	481,92	961,92	718,08	1438,08	179 038,08
13	3	1 200,00	0,00	483,85	1 445,77	716,15	2154,23	178 554,23
14	4	1 200,00	0,00	485,78	1 931,55	714,22	2868,45	178 068,45
15	5	1 200,00	0,00	487,73	2 419,28	712,27	3580,72	177 580,72
	⋮ .	⋮ .	⋮ .	⋮ .	⋮ .	⋮ .	⋮ .	⋮ .
235	225	1 200,00	0,00	1 173,80	174 622,99	26,20	95377,01	5 377,01
236	226	1 200,00	0,00	1 178,49	175 801,48	21,51	95398,52	4 198,52
237	227	1 200,00	0,00	1 183,21	176 984,68	16,79	95415,32	3 015,32
238	228	1 200,00	0,00	1 187,94	178 172,62	12,06	95427,38	1 827,38
239	229	1 200,00	0,00	1 192,69	179 365,31	7,31	95434,69	634,69
240	230	637,22	0,00	634,69	180 000,00	2,54	95437,22	0,00

$$229 \times 1200 + 637{,}22 - 180\,000 = 95\,437{,}22$$

Le coût total du crédit est donc 95 437,22 €, autrement dit la somme totale des intérêts versés, si le couple choisit de contracter son emprunt auprès de la banque Alpha.

$$236 \times 1200 + 313{,}89 - 180\,000 = 103\,513{,}89$$

Le coût total du crédit avec la banque Bêta est 103 513,89 €.

Monsieur et Madame Martin ont intérêt à choisir la banque Alpha.

Partie B

1. a. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{12} \times \frac{4{,}8}{100} \times c_n = 0{,}004c_n$

Pour tout entier naturel n non nul, $c_{n-1} - c_n = v_n$

b. Pour tout entier naturel n non nul,

$$v_{n+1} - v_n = (1200 - u_{n+1}) - (1200 - u_n) = u_n - u_{n+1} = 0{,}004(c_{n-1} - c_n)$$

2. Au regard des résultats obtenus à l'aide du tableur de la partie A, la suite (v_n) semble géométrique. Soit n un entier naturel non nul.

On sait que $c_{n-1} - c_n = v_n$.

Donc $v_{n+1} = 1{,}004\, v_n$ pour tout entier naturel n non nul.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 1,004 et de premier terme $v_1 = 480$.

3. Voici un algorithme et une fonction en Python permettant de déterminer le nombre de mensualités du prêt.

<table>
<tr>
<td>
v ←480
n ←1
s ←v
Tant Que s < 180 000
    v ←1,004v
    s ←s + v
    n ←n + 1
Fin Tant Que
Ecrire n
</td>
<td>

```python
def banque(mensualite,taux,montant) :
    v= mensualite - taux*montant/12
    n=1
    s=v
    while s < montant :
        v = v *(1 + taux/12)
        s = s + v
        n = n + 1
    return n
```

</td>
</tr>
</table>

Annexe 2 - Éléments de correction de l'activité intitulée « Datation au carbone 14 »

Partie A

1. Depuis la mort du mammouth, le nombre d'atomes de carbone 14 présents dans le fragment osseux diminue très lentement au cours du temps, d'environ 0,121 % par décennie, alors que le nombre d'atomes de carbone 12 n'évolue pas.

Si on note N le nombre d'atomes de carbone 12 présents dans le fragment osseux, il y avait $\frac{N}{10^{12}}$ atomes de carbone 14 à l'instant de la mort du mammouth et aujourd'hui il n'en reste plus que $\frac{N}{40 \times 10^{12}}$.

Au bout de n décennies après la mort du mammouth, le nombre d'atomes de carbone 14 présents dans le fragment osseux est $\left(1-\frac{0{,}121}{100}\right)^n \times \frac{N}{10^{12}}$.

Il faut donc chercher le plus petit entier naturel n tel que $\left(1-\frac{0{,}121}{100}\right)^n \times \frac{N}{10^{12}} \leq \frac{N}{40\times10^{12}}$

L'élève est donc conduit à résoudre l'inéquation $\left(1-\frac{0{,}121}{100}\right)^n < 0{,}025$

Pour cela, il pourra aussi bien utiliser sa calculatrice, un programme en Python ou encore un tableur. Il trouvera alors que le plus petit entier naturel n tel que :

$\left(1-\frac{0{,}121}{100}\right)^n < 0{,}025$ est 3047

Ainsi, on peut estimer que le mammouth est mort depuis 30 470 ans à 10 ans près, puisque cette valeur sera comprise entre 30460 et 30470.

2. On admet que l'on peut ainsi estimer l'âge de fossiles ou de fragments osseux qui contiennent au moins 0,3 % du carbone 14 initial.

Notons N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 présents initialement dans un fossile ou un fragment osseux

Au bout de n décennies, le nombre d'atomes de carbone 14 présents dans le fossile ou le fragment osseux est $\left(1-\frac{0{,}121}{100}\right)^n \times \mathrm{N}_0$

Pour déterminer à l'aide d'un tableur l'âge maximum que l'on peut estimer à 10 ans près à l'aide de la datation au carbone 14, l'élève est donc conduit à déterminer le plus grand entier naturel n tel que$\left(1-\frac{0{,}121}{100}\right)^n \times \mathrm{N}_0 \geq 0{,}003 \times \mathrm{N}_0$ et donc tel que $\left(1-\frac{0{,}121}{100}\right)^n \geq 0{,}003$

L'entier n cherché est 4798. À 10 ans près, on considère être en mesure d'estimer un âge maximum de 47 980 ans à l'aide de la datation au carbone 14.

3. Ce programme permet de déterminer la demi-vie du noyau radioactif de carbone 14, soit 5 730 ans.

4.a) Notons u_n le nombre d'atomes de carbone 14 présents au bout de nT années et donc au bout de $5730n$ années.

$u_1 = \frac{1}{2}u_0$ par définition de la demi-vie du noyau radioactif de carbone 14

$u_2 = \frac{1}{2}u_1$ pour les mêmes raisons.

Donc $u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{4}u_0$

Ainsi au bout de 2T années, le nombre d'atomes de carbone 14 a bien été divisé par 4.

b) On démontre aisément que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et on en déduit le résultat énoncé.

Partie B

1. a) $\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} = x_n + h$ et $y_{n+1} = p(x_n) + hp'(x_n)$

$\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} = x_n + h$ et $y_{n+1} = y_n - 0{,}00121hp(x_n)$

$\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} = x_n + h$ et $y_{n+1} = (1 - 0{,}00121h)y_n$

Ainsi la suite (x_n) est une suite arithmétique de raison h et de premier terme $x_0 = 0$. Et la suite

(y_n) est une suite géométrique de raison $1 - 0{,}00121h$ et de premier terme $y_0 = 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N} x_n = nh$ et $y_n = (1 - 0{,}00121h)^n$

Valeurs approchées de $p(573)$

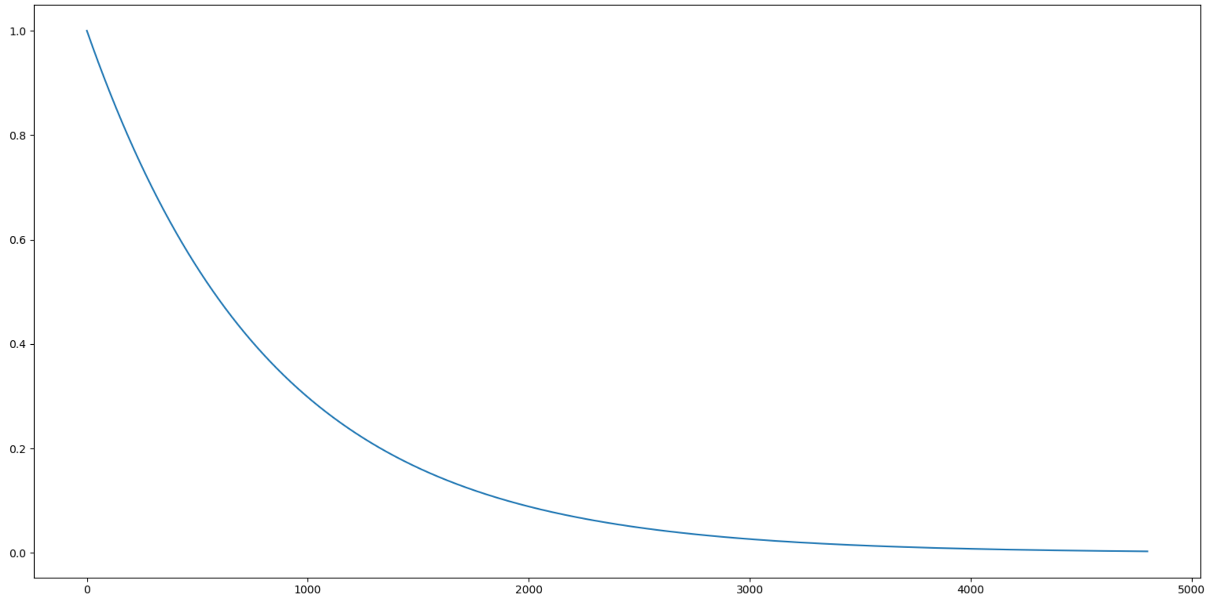
h	$n = \frac{x_n}{h}$	$y_n \approx p(573)$
1	573	$(1 - 0{,}00121)^{573} \approx 0{,}499699$
0,1	5730	$(1 - 0{,}000121)^{5730} \approx 0{,}499888$
0,01	57300	$(1 - 0{,}0000121)^{57300} \approx 0{,}499907$

Valeurs approchées de $p(3047)$

h	$n = \frac{x_n}{h}$	$y_n \approx p(3047)$
1	3047	$(1 - 0{,}00121)^{3047} \approx 0{,}024994$
0,1	30470	$(1 - 0{,}000121)^{30470} \approx 0{,}025045$
0,01	304700	$(1 - 0{,}0000121)^{304700} \approx 0{,}025050$

Les résultats obtenus sont bien cohérents avec ceux de la partie A.

2. Si on saisit dans la console courbe(0.1), le programme renvoie la courbe approchant celle de p à l'aide de la méthode d'Euler avec un pas de 0,1.



3.

```
import matplotlib.pyplot as plt

def courbe(h) :
    global demivie,agemammouth
    M = int(4800/h) + 1
    abscisses=[0]
    ordonnees=[1]
    x=0
    y=1
    a=0
    b=0
    for i in range(M+1) :
        x=x+h
        y=y*(1-0.00121*h)
        abscisses.append(x)
        ordonnees.append(y)
        if y < 0.5 and a == 0 :
            demivie=x*10
            a= 1
        if y<0.025 and b == 0 :
            agemammouth = x*10
            b=1
    plt.plot(abscisses,ordonnees,'-',label="Approximation de p")
    plt.xlabel("Nombre de décennies")
    plt.ylabel("proportion de carbone 14 restant")
    plt.legend()
    plt.show()
    afficher(demivie,agemammouth)

def afficher(z,t):
    print("La demi vie du noyau radioactif d'un atome de carbone 14 est environ",z,'
          années et le mammouth a perdu la vie depuis ',t,' années.' )
```

4. Plus h est petit et plus la courbe approchant p par la méthode d'Euler tend vers la courbe représentant la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-0{,}00121t}$

On admettra donc que $p(t) = \mathrm{e}^{-0{,}00121t}$ pour tout $t \in [0\,;+\infty[$.

5. $15 \times e^{-0{,}00121\times 10} \approx 14{,}820$

Au bout de 100 ans, cet échantillon de matière contiendra environ 14,820 grammes de carbone 14.

$15 \times e^{-0{,}00121\times 201{,}9} \approx 11{,}749$

Au bout de 2019 ans, cet échantillon de matière contiendra environ 11,749 grammes de carbone 14.

Annexe 3 - Fiche méthode sur la méthode d'Euler

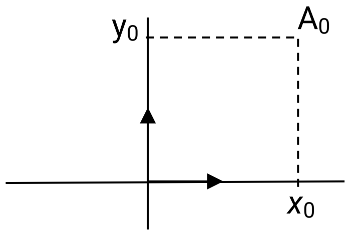
Introduction

Dans de nombreux problèmes, il arrive que l'on connaisse la dérivée *f '* d'une fonction *f* et une valeur de *f* en un point (ou la condition initiale $f(x_0) = y_0$) mais que l'on ne connaisse pas la formule explicite de *f*. Par exemple, on peut connaître la vitesse à chaque instant d'un projectile et sa position initiale à l'instant t = 0, mais ne pas connaître la loi horaire de ce projectile.

Méthode

La méthode d'Euler permet de construire des représentations approchées d'une fonction *f* dont on connaît la dérivée *f '* et la valeur de *f* en un point x_0 : pour cela on utilise le fait que **pour un réel h proche de 0,**

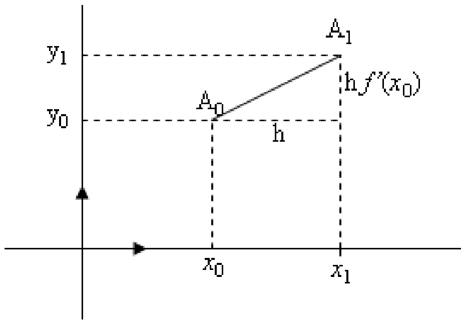
$f(x + h)$ est voisin de $f(x) + h\,f'(x)$.



Etape 0

Puisqu'on connaît $f(x_0) = y_0$, on peut déjà placer un point de la courbe représentative de *f* : le point $A_0(x_0\,;y_0)$.

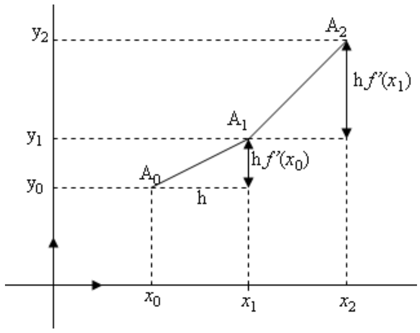
Etape 1



On choisit un réel h non nul proche de 0, puisqu'on connaît $f'(x_0)$, on construit le point A_1 d'abscisse $x_1 = x_0 + h$ appartenant à la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(x_0)$.

L'ordonnée de ce point est $y_1 = f(x_0) + h\,f'(x_0)$; on sait que $f(x_0) + h\,f'(x_0) \approx f(x_0 + h)$ lorsque h est proche de 0, donc ce point A_1 est proche de la courbe C_f.

Etape 2



De même à partir de A_1, on peut construire le point $A_2(x_1 + h\,;f(x_1) + h\,f'(x_1))$

Itération du processus

De proche en proche, on place des points A_n de coordonnées $(x_n\,;y_n)$, où

$$x_n = x_{n-1} + h \text{ et } y_n = f(x_{n-1}) + h\,f'(x_{n-1}), \text{ avec } n \geq 1.$$

La succession des segments $[AA_1]$, $[A_1A_2]$, … donne une représentation approchée de la fonction *f* qui dépend de h.

Annexe 4 - Eléments de correction de l'activité intitulée « Dosage d'un analgésique »

Partie A

1. On démontre aisément que le choix d'une suite arithmétique ou géométrique n'est pas pertinent.

2. On démontre aisément que la progression que suivent les nombres $16 - q(0)$, $16 - q(1)$,

$16 - q(2)$ … est proche d'une progression géométrique.

3.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$16 - q(n)$	16	14,432	12,96	11,707	10,608	9,579	8,653	7,736	6,887
$q(n+1) - q(n)$	1,568	1,472	1,253	1,099	1,029	0,926	0,917	0,849	0,688

La vitesse moyenne d'absorption de l'analgésique par l'organisme du patient entre l'instant

$t_n = n$ min et l'instant $t_{n+1} = n + 1$ min exprimée en µg/min est $q(n+1) - q(n)$.

Il est raisonnable de dire que cette dernière est proportionnelle à l'écart entre 16 et la quantité d'analgésique exprimée en µg présente dans l'organisme du patient à l'instant $t_n = n$ min, car pour tout entier naturel n, $\frac{q(n+1)-q(n)}{16-q(n)} \approx 0{,}1$.

4. a) On démontre aisément que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = 16$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = 16(1 - 0{,}9^n)$

c) Voici un algorithme permettant de déterminer à la minute près l'instant auquel la perfusion devra être stoppée.

<table>
<tr>
<td>u←0
n←0
Tant Que u ≤ 15
    u←0,9u + 1,6
    n←n + 1
Fin Tant Que
Ecrire n</td>
<td>

```python
def StopPerfusion() :
    u=0
    n=0
    while u<=15 :
        u=0.9*u+1.6
        n=n+1
    return(n)
```

</td>
</tr>
</table>

Partie B : Utilisation d'un modèle continu

1. $\forall\, t \in [0\,;+\infty[\ f(t) = 16(1 - e^{-0.105t})$

2. $\forall\, t \in [0\,;+\infty[\ f'(t) = 1{,}68\, e^{-0.105t}$

$\forall\, t \in [0\,;+\infty[\ f'(t) > 0$

Ainsi f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

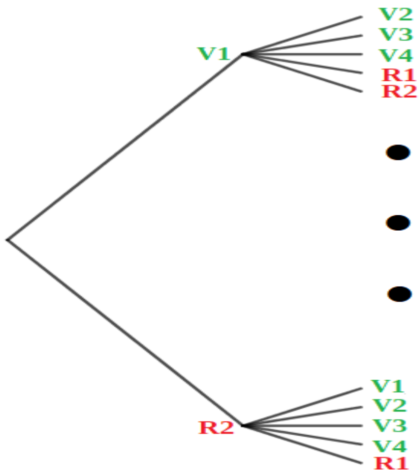
3. Si on saisit dans la console duree (1/60), le programme va renvoyer l'instant à la seconde près où l'anesthésiste devra arrêter la perfusion.

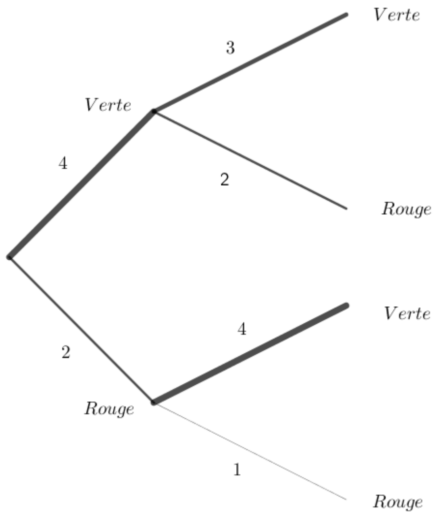
Il devra arrêter la perfusion au bout de 26,4375 min soit environ 26 min et 26 s.

Annexe 5 - L'urne

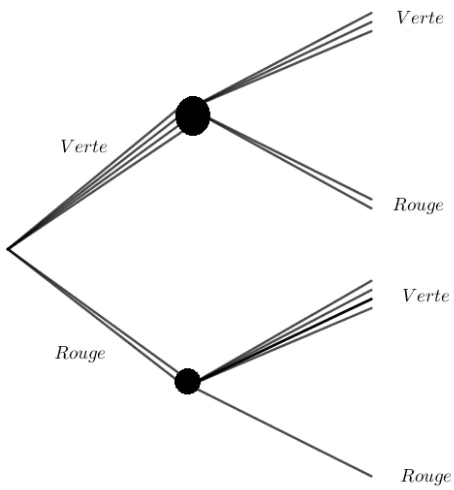
1. On pourra organiser les restitutions des travaux d'élèves afin de passer progressivement d'un arbre de dénombrement à un arbre pondéré par les probabilités

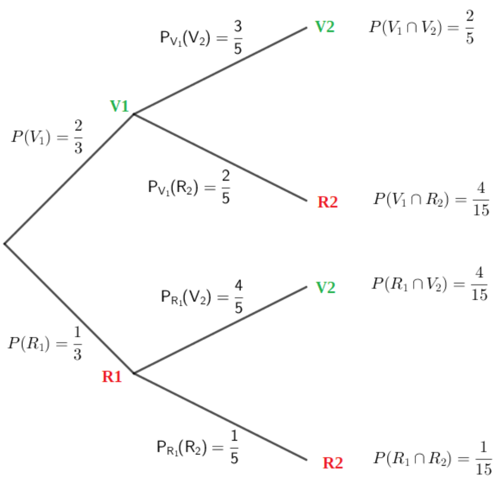
On numérote les boules





On numérote les tirages

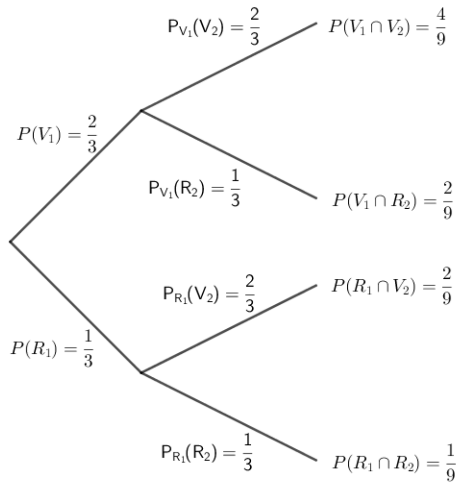




La probabilité de gagner est donc $\frac{2}{5}$.

2 L'arbre pondéré permet de répondre facilement à la deuxième question. Avec 20 boules rouges et 40 boules vertes, la probabilité de gagner n'est plus la même : $\frac{40}{60} \times \frac{39}{59} = \frac{26}{59}$

3 Dans un tirage avec remise, les probabilités sont inchangées car les proportions sont inchangées.

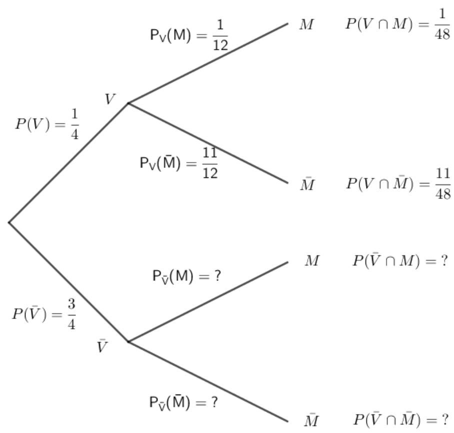


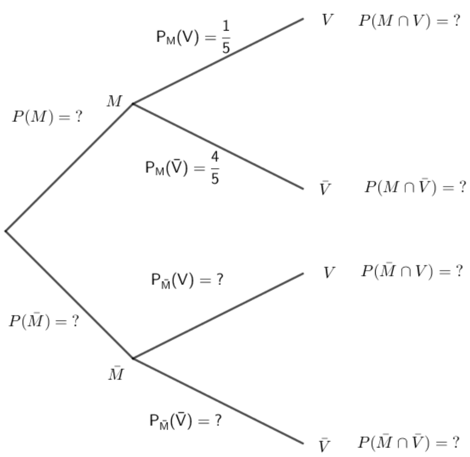
On dégage ici un cadre de référence que l'on modélise par des épreuves indépendantes.

La probabilité de gagner est donc $\frac{4}{9}$.

Annexe 6 - Vaccination

Traduction des données de l'énoncé :

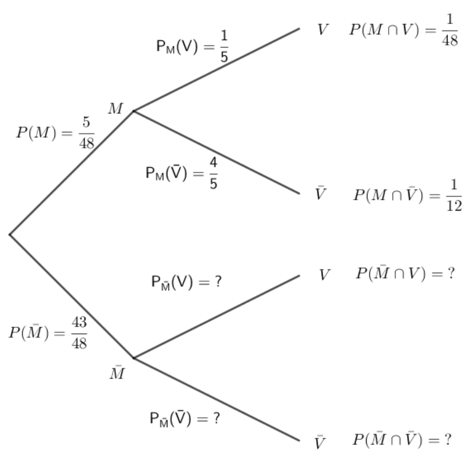


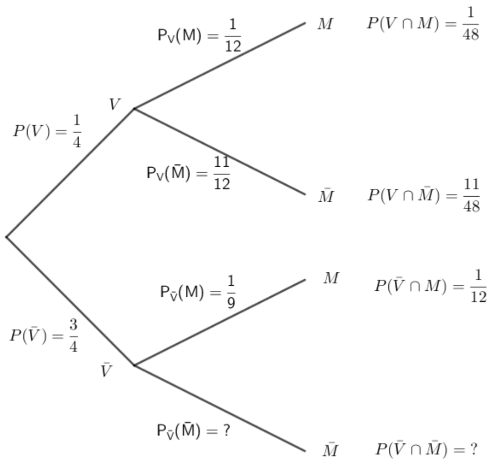


$P(M \cap V) = \frac{1}{48}$ donc $P(M) = \frac{P(M \cap V)}{P_M(V)} = \frac{\frac{1}{48}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{48}$

Cela nous donne $P_M(\bar{V}) = \frac{4}{5}$ et donc $P(M \cap \bar{V}) = \frac{1}{12}$

Par conséquent $P_{\bar{V}}(M) = \frac{P(M \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{9}$



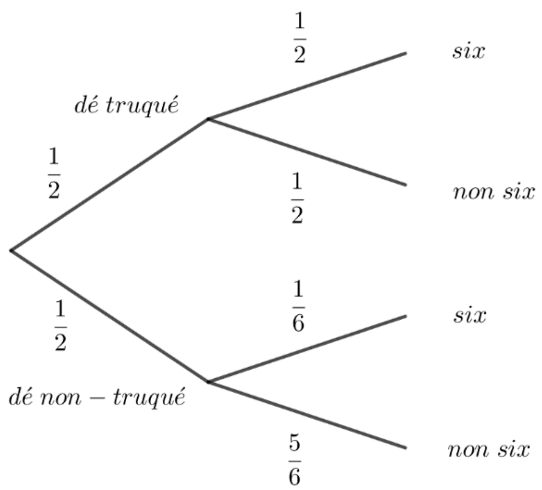


Annexe 7 - Dé truqué

Exemple de production d'élève :

FAUX. On prend un des deux dés au hasard, on a donc 1/2 chance de prendre le dé truqué

Il s'agit de calculer $P_{"six"}("truqué")$



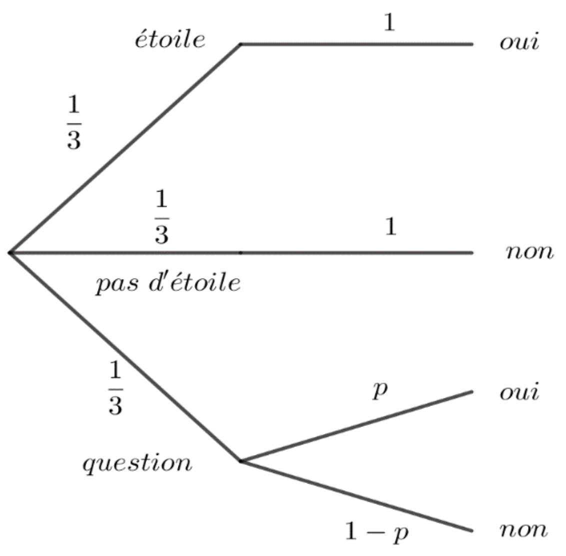
$P\left(\text{"truqué"} \cap \text{"six"}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P\left(\text{"truqué"} \cap \text{"six"}\right) + P\left(\text{"non-truqué"} \cap \text{"six"}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$P_{"six"}(\text{truqué}) = \frac{P(\text{"truqué"} \cap \text{"six"})}{P(\text{"six"})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

La proposition est donc fausse.

Annexe 8 - Question taboue



On a $\frac{1}{3}p + \frac{1}{3} = \frac{669}{1500}$ donc $p = 3 \times \frac{669}{1500} - 1$

$$p = \frac{169}{500} = 0.338$$

On peut donc estimer qu'environ 34 % des soldats font usage de la drogue.

Annexe 9 - Jeu de casino

Simulation sur tableur :

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	N° partie	dé 1	dé 2	nb d'apparition	Gain algébrique			
3	1	2	5	0	-1		Total gain algébrique	
4	2	3	6	1	0		25	
5	3	1	3	0	-1			
6	4	5	2	0	-1		Gain algébrique moyen	
7	5	2	5	0	-1		0.25	
8	6	3	1	0	-1			
9	7	3	3	0	-1			
10	8	6	6	2	19			
11	9	5	2	0	-1			
12	10	3	4	0	-1			
13	11	3	3	0	-1			
14	12	3	2	0	-1			
15	13	6	3	1	0			
16	14	4	1	0	-1			
17	15	5	1	0	-1			
18	16	6	3	1	0			
19	17	3	6	1	0			
20	18	1	6	1	0			
21	19	1	6	1	0			
22	20	1	1	0	-1			

Simulation algorithmique :

```
def une_partie(numero_choisi):
    compteur=0
    for k in range(2):
        de=random.randint(1,6)
        if de==numero_choisi:
            compteur=compteur+1
    return(compteur)

def gain_partie(numero_choisi):
    compteur=une_partie(numero_choisi)
    if compteur==2:
        gain=19
    else:
        gain=-1+compteur
    return(gain)

def gain_total(nb_parties,numero_choisi):
    gain_total=0
    for k in range(nb_parties):
        gain_total=gain_total+gain_partie(numero_choisi)
    return(gain_total)

def gain_moyen(nb_parties, numero_choisi):
    gain_moyen=gain_total(nb_parties,numero_choisi)/nb_parties
    return(gain_moyen)
```

```
>>> une_partie(6)
1
>>> une_partie(6)
0
>>> une_partie(6)
0
>>> gain_partie(6)
-1
>>> gain_partie(6)
-1
>>> gain_partie(6)
0
>>> gain_total(100,6)
-7
>>> gain_total(100,6)
-53
>>> gain_total(100,6)
-13
>>> gain_total(100,6)
44
>>> gain_moyen(10000000,6)
-0.168026
```

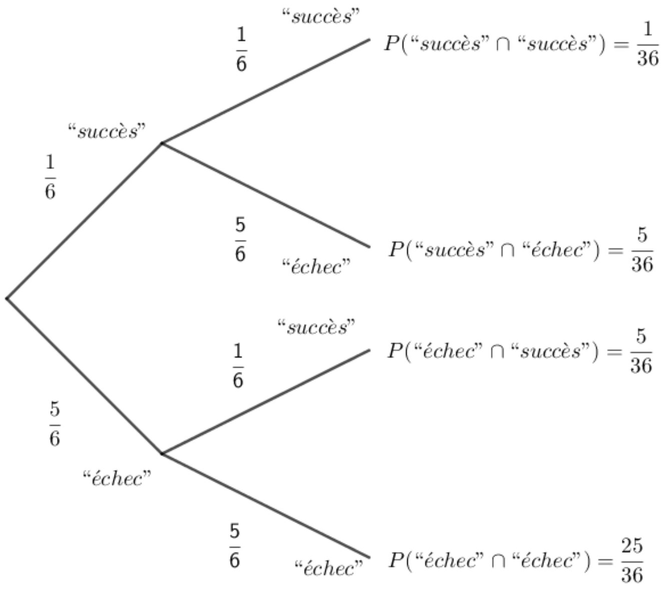
```
def une_partie(numero_choisi):
    compteur=0
    for k in range(3):
        de=random.randint(1,6)
        if de==numero_choisi:
            compteur=compteur+1
    return(compteur)

def gain_partie(numero_choisi):
    compteur=une_partie(numero_choisi)
    if compteur==3:
        gain=99
    else:
        gain=-1+compteur
    return(gain)

def gain_total(nb_parties,numero_choisi):
    gain_total=0
    for k in range(nb_parties):
        gain_total=gain_total+gain_partie(numero_choisi)
    return(gain_total)

def gain_moyen(nb_parties, numero_choisi):
    gain_moyen=gain_total(nb_parties,numero_choisi)/nb_parties
    return(gain_moyen)
```

```
>>> une_partie(6)
2
>>> une_partie(6)
1
>>> gain_partie(6)
0
>>> gain_partie(6)
0
>>> gain_total(100,6)
-44
>>> gain_total(100,6)
-56
>>> gain_total(100,6)
58
>>> gain_moyen(10000000,6)
-0.0481294
>>> |
```



La loi de probabilité de la variable aléatoire G qui, à une partie, associe le gain (algébrique) réel du joueur est donc :

x	-1	0	19	Total
P[G=x]	$^{25}/_{36}$	$^{10}/_{36}$	$^{1}/_{36}$	1

La démarche suivante permet de répondre au problème et d’introduire la notion d’espérance d’une variable aléatoire.

Lorsque l’on réalise 36 000 parties, on peut espérer :

- 1 000 parties avec 2 succès : G=19
- 10 000 parties avec 1 succès : G=0
- 25 000 parties avec 0 succès : G=-1

Au total, sur 36 000 parties jouées, le joueur peut espérer :

$$25000\times(-1)+10000\times0+1000\times19= -6000$$

Le jeu est donc défavorable au joueur.

Le gain moyen que l’on peut espérer par parties est :

$$\frac{25000\times(-1)+10000\times0+1000\times19}{36000} = -1\times\frac{25}{216}+0\times\frac{10}{36}+19\times\frac{1}{36}=\frac{-1}{6}$$

L’espérance de la variable aléatoire G est donc : E[G]=$\frac{-1}{6}$

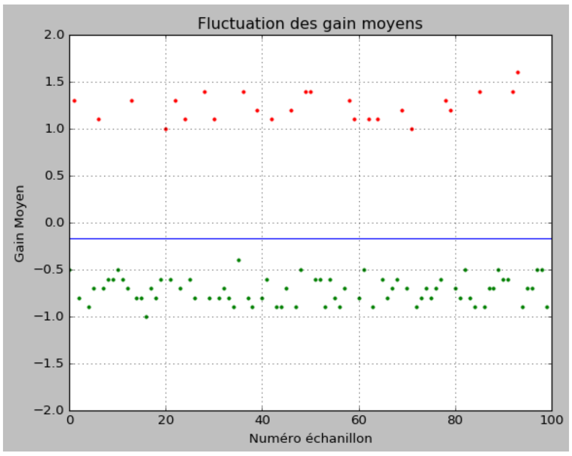
Le jeu est donc défavorable au joueur et favorable au casino.

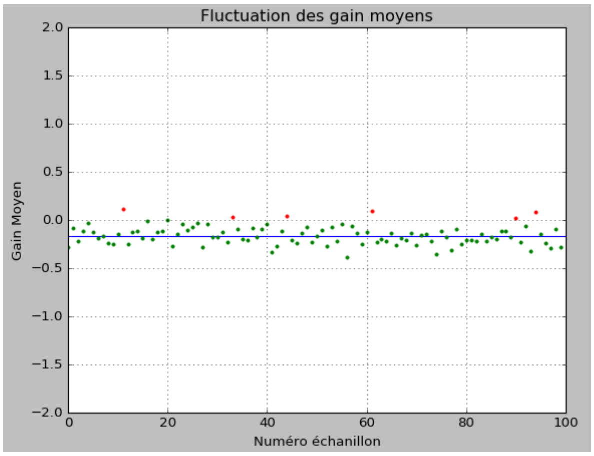
Annexe 10 - Évaluer le risque pris par le casino

Objectif
Étudier sur des exemples la différence entre moyenne d'un échantillon simulé de taille *n* d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable aléatoire.

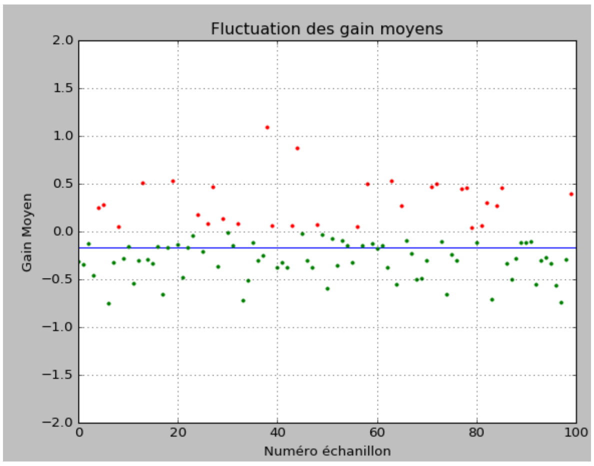
Il s'agit ici de faire comprendre aux élèves que le risque pris par le casino dépend du nombre total de parties jouées. On constate qu'en simulant 100 échantillons de 10 parties, pour bons nombres d'entre −eux (en rouge), le gain moyen est favorable au joueur. Ce n'est plus le cas pour des échantillons de taille 10 000. L'écart entre la valeur moyenne d'un échantillon simulé et l'espérance de la variable aléatoire diminue à mesure que la taille de l'échantillon augmente : le casino prendra d'autant moins de risque que le nombre total de parties sera grand.

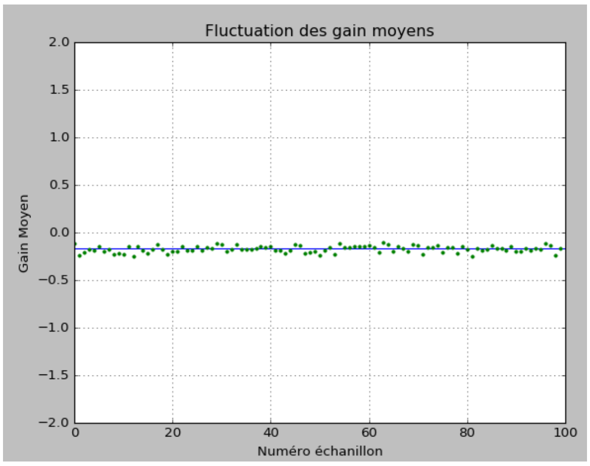
100 échantillons de 1000 parties





100 échantillons de 10 000 parties





```python
def gain_moyen_graph(nb_echantillons, nb_parties):
    X=[]
    Y=[]
    U=[]
    V=[]
    A=[0,nb_echantillons]
    B=[-1/6,-1/6]
    for k in range(nb_echantillons):
        gm=gain_moyen(nb_parties,6)
        if gm>=0:
            X.append(k)
            Y.append(gm)
        else :
            U.append(k)
            V.append(gm)
    plt.plot(A,B,'b-')
    plt.plot(X,Y,'r.')
    plt.plot(U,V,'g.')
    plt.axis([0, nb_echantillons, -2, 2])
    plt.xlabel('Numéro échanillon')
    plt.ylabel('Gain Moyen')
    plt.title('Fluctuation des gain moyens')
    plt.grid()
    plt.show()
```

Annexe 11 - Monte-Carlo

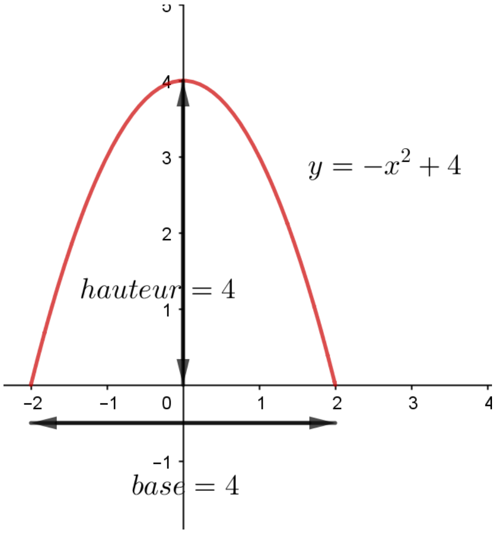
Valeur approchée de π

L'algorithme génère des points M(x ;y) avec -1<x<1 et -1<y<1. Les points sont donc générés à l'intérieur d'un carré de côté 2 (d'aire 4). Le disque inscrit dans ce carré a pour rayon 1 (et pour aire π). Un point M est à l'intérieur du disque si et seulement si OM<1 (où O est l'origine du repère).

A mesure que le nombre de points générés est grand, la proportion de points à l'intérieur du disque s'approche donc de ${}^{\pi}/_{4}$.

Il vient : π ≈0.7855082$\times$ 4 =3,1420328 à comparer à 3,141592654 donné par la calculatrice

Aire sous la parabole



En appliquant la formule d'Archimède :

$$ {}^{2}/_{3} \times base \times hauteur = {}^{32}/_{3} $$

```
def point():
    x=uniform(-2,2)
    y=uniform(0,4)
    return(x,y)

def proportion(n):
    compteur=0
    for k in range(n):
        (x,y)=point()
        z=-x**2+4
        if y<=z:
            compteur=compteur+1
    return(compteur/n)

def aire(n):
    p=proportion(n)
    aire=p*16
    return(aire)
```

La méthode de Monte-Carlo semble valider la formule avancée (et prouvée) par Archimède.

```
>>> proportion(10000000)
0.7855082
```

```
>>> aire(10000000)
10.6652144
```