RAISONNEMENT ET DÉMONSTRATION

Mots clés

Raisonnement – Démonstration, preuve – Compétences : raisonner, chercher, communiquer
Différenciation – Trace écrite

Intentions majeures

Au-delà de son intérêt majeur dans la formation des futurs scientifiques, le raisonnement mathématique est un axe important de la formation du citoyen. Il permet de comprendre ce qu'est une démarche de justification argumentée reposant sur la logique, de développer l'esprit critique, de former le futur citoyen à comprendre le monde et analyser l'information.

Selon le rapport Villani-Torossian[1] :

« Il est important qu'un citoyen soit capable d'opérer une écoute active et critique face à un discours qui lui est tenu, que ce soit dans un cadre professionnel, politique, ou autre. Ainsi, se familiariser avec la démarche de la preuve mathématique est un moyen d'apprendre à décomposer un raisonnement en arguments, à déceler d'éventuelles failles ou erreurs, à ne pas confondre l'hypothèse et ses conséquences ou l'ordre logique qui s'y réfère, voire à déceler la substitution d'une causalité à une corrélation pour justifier un argument peu étayé scientifiquement. »

Ce rapport réaffirme l'importance de la notion de preuve dans l'activité mathématique et recommande de redonner une place significative à la présentation de démonstrations de résultats du cours.

Le programme de mathématiques de première générale[2] prend en compte cette recommandation :

« Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme identifie quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc. »

[1] https://cache.media.education.gouv.fr/file/Fevrier/19/0/Rapport_Villani_Torossian_21_mesures_pour_enseignement_des_mathematiques_896190.pdf

[2] https://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/16/8/spe632_annexe_1063168.pdf

De la seconde à la première générale

La formation des élèves au raisonnement, en spécialité de première générale, s'inscrit tout naturellement dans la continuité de celle commencée au cycle 4 et poursuivie en classe de seconde. Aussi, ce document prolonge celui sur le raisonnement et la démonstration en classe de seconde de 2019 (adresse web à rajouter), ainsi que des documents antérieurs, auxquels on pourra utilement se reporter :

- ressources pour le cycle 4 (mars 2016) sur la compétence « Raisonner »[3] ;
- ressources pour le collège (juin 2009 et réédité en mars 2016) » Raisonnement et démonstration »[4] ;
- ressources pour la classe de seconde (juillet 2009) « Notations et raisonnement mathématiques »[5].

Bien que ces deux derniers aient été écrits pour des programmes antérieurs, ils conservent leur intérêt. Il est notamment intéressant de reprendre la distinction qu'on y trouve entre raisonnement et démonstration : le raisonnement est une forme de cheminement plus ou moins complexe pouvant comprendre recherche, découverte, conjecture, production d'une preuve peut-être partielle ; la démonstration est une forme de communication d'une preuve aboutie, qui repose sur des résultats acquis antérieurement et sur les règles de la logique.

Cette distinction peut être analysée du point de vue des six compétences mathématiques[6], et, plus précisément de trois d'entre elles : raisonner, chercher, communiquer.

En classe de seconde, l'enseignement des mathématiques doit, en tenant compte de la diversité du public et de l'hétérogénéité des niveaux, viser trois objectifs :

- poursuivre la formation du citoyen commencée dans le cadre du socle commun ;
- assurer une solide formation aux futurs scientifiques sans décourager les autres ;
- éclairer les élèves sur l'intérêt de faire des mathématiques en première pour servir un grand nombre de projets d'études.

Le travail sur le raisonnement et la démonstration en seconde s'appuie sur celui effectué au cycle 4, tel qu'il est décrit dans le préambule du programme de mathématiques[7].

Raisonner pour chercher, raisonner pour démontrer

Dans une phase de recherche, le raisonnement inclut des formes heuristiques telles que l'essai-erreur, la recherche de conjectures par :

- raisonnement inductif : conjecturer une proposition générale à partir de la vérification de cas particuliers ;
- raisonnement abductif : sachant que A implique B et voulant démontrer B, on peut être amené à conjecturer A.

---

[3] https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf

[4] https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/50/0/doc_acc_clg_raisonnementetdemonstration_223500.pdf

[5] http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/0/Doc_ressource_raisonnement_109180.pdf

[6] https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/90/0/Competences_mathematiques_Lycee_282900.pdf

[7] https://cache.media.eduscol.education.fr/file/programmes_2018/20/4/Cycle_4_programme_consolide_1038204.pdf

Mentionnons aussi la preuve sur un exemple générique (démonstration sur un cas susceptible d'être adaptée au cas général), la « preuve sans mots » (justification sur une figure peu ou non commentée).

Dans une phase de démonstration, on utilise le raisonnement déductif qui peut se présenter sous diverses formes : raisonnement par implication, par équivalence, par l'absurde, par disjonction de cas, etc. La mise en forme de la démonstration s'appuie sur les compétences « raisonner » et « communiquer ».

Le raisonnement intervient ainsi dans ces activités diverses (chercher et conjecturer, affirmer et démontrer) dont la valeur et l'intérêt sont à mettre en évidence. Il importe aussi que l'élève apprenne à les distinguer clairement : une conjecture n'est pas un théorème, un raisonnement inductif n'est pas déductif, A implique B ne signifie pas B implique A, une hypothèse n'est pas une inclusion.

Ainsi, l'élève doit être encouragé à chercher, à juger avec lucidité les résultats qu'il obtient, à reconnaître comme tel un argument incomplet, à éviter les affirmations non étayées.

Spécificités en première générale

Le plan Villani-Torossian réaffirme l'importance de la notion de preuve dans l'activité mathématique et précise que chaque preuve s'inscrit dans un processus de maturation symbolisé par le triptyque manipuler/verbaliser/abstraire. Ainsi la démonstration ne s'inscrit pas dans un moment isolé de l'apprentissage, mais se construit avec progressivité dans un processus plus élaboré, qui donne toute sa place à l'activité de recherche de l'élève (« manipuler »), au débat scientifique entre élèves orchestré par le professeur (« verbaliser »), enfin à la synthèse où le professeur dégage à la fois les notions mathématiques visées (« abstraire ») mais aussi ce qui est à retenir : savoirs, savoir-faire et méthodes transférables.

Le programme de la spécialité mathématique de première générale précise ces différents éléments dans les lignes directrices pour l'enseignement

« Le professeur doit veiller à établir un équilibre entre divers temps d'apprentissage :

- les temps de recherche, d'activité, de manipulation ;
- les temps de dialogue et d'échange, de verbalisation ;
- les temps de cours, où le professeur expose avec précision, présente certaines démonstrations et permet aux élèves d'accéder à l'abstraction […]. »

Vis-à-vis du raisonnement et de la démonstration, l'objectif de formation en classe de première générale est multiple. D'une part, il s'agit de consolider les acquis de la seconde en développant des concepts mathématiques et scientifiques favorisant les poursuites d'études, notamment en développant les approches interdisciplinaires. D'autre part, il importe d'entretenir chez tous les élèves le goût des mathématiques, sans décourager quiconque, afin d'éclairer les choix en classe de terminale. Ensuite, la pratique des différentes formes de raisonnements doit contribuer à développer l'esprit critique, à former le futur citoyen à comprendre le monde et analyser l'information. Enfin, pour les élèves ayant suivi la spécialité en première, la compétence « raisonner » peut être évaluée dans les épreuves de baccalauréat, en première ou en terminale selon les choix de spécialité de terminale.

En classe de première, l'enjeu est de souscrire à cette ambition tout en tenant compte de la diversité des élèves, de leurs autres enseignements de spécialité et de leurs projets. Il s'agit :

- de donner à tous les élèves une formation consistante, qui développe leur motivation et leur persévérance, les encourage à percevoir l'intérêt des mathématiques, pour elles-mêmes ou pour les autres enseignements de spécialité ;

- d'éclairer les élèves sur la place des mathématiques en terminale, selon un horaire hebdomadaire de 3, 6 ou 9 heures, et dans l'enseignement supérieur, au service d'un grand nombre de projets d'études ;
- de préparer à l'épreuve commune de contrôle continu les élèves qui ne choisiront pas la spécialité mathématiques en terminale.

La spécialité « mathématiques » de première générale n'est pas la reconduction de la série scientifique. Elle s'adresse à des élèves dont les profils sont plus diversifiés et dont les autres enseignements de spécialité diffèrent, l'objectif étant de proposer des objectifs ambitieux, notamment en matière de raisonnement et de démonstration, cette ambition ne devant pas être réservée aux seuls futurs scientifiques.

Il convient donc bien d'envisager des mesures de différenciation permettant de concilier les exigences de formation pour tous les élèves avec les difficultés de certains d'entre eux.

Chaque élève doit donc se voir proposer un parcours de formation mathématique jalonné de choix, permettant de servir au mieux ses objectifs propres d'orientation et de construction intellectuelle ou citoyenne.

Clarifier et faire évoluer les pratiques

Ces considérations ont déjà été détaillées dans la ressource sur le raisonnement pour la classe de seconde. Rappelons qu'il importe, avant d'aborder certaines démonstrations du programme, de préparer les élèves à l'exercice par un travail en amont, sous forme de questions flash ou d'autres activités préalables. D'une part, cette préparation consiste à lister et installer les prérequis voulus. D'autre part, il importe de piquer la curiosité des élèves avant de la satisfaire, autrement dit de les motiver en faisant émerger chez eux la nécessité d'une démonstration. Quelques préconisations propices à atteindre ces objectifs sont détaillées dans la suite du document.

Il convient au préalable de préparer le terrain avant d'aborder certaines démonstrations du programme. Cela demande d'abord de s'appuyer sur des approches heuristiques, de manipuler et de verbaliser avant d'abstraire, comme il est indiqué dans le rapport Villani-Torossian. Cela requiert ensuite de susciter chez les élèves une motivation pour la preuve mathématique ; diverses approches peuvent faire naître ou conforter cette motivation :

- proposer des « trompe-l'œil « activités destinées à déjouer des intuitions erronées) afin de montrer les limites de l'intuition ou d'une observation trop rapide ;
- trouver une accroche en posant un problème que les élèves ne savent pas résoudre avec les outils connus ;
- poser des questions ouvertes, engendrer le doute et débattre autour de controverses ;
- traiter des situations particulières pour motiver l'étude de cas généraux.

Il importe également :

- de préciser le contrat vis-à-vis des démonstrations du programme, qui n'ont pas vocation à être évaluées ; toutefois, les formes de raisonnement mises en jeu, après une certaine pratique, peuvent être mobilisées dans d'autres situations simples, en formation ou en évaluation ;
- de proposer des scénarios variés prenant en compte la diversité des élèves et les adapter à ceux ne maîtrisant pas les outils antérieurement étudiés, tels l'usage poussé du calcul littéral ;
- d'éviter d'encombrer de nouvelles démonstrations assez longues par d'autres antérieurement étudiées, que l'on peut alors considérer comme « évidentes » ;
- d'éviter une technicité excessive, notamment dans le calcul.

Quelques pistes pour différencier

Des démonstrations différentes

Pour prendre en compte la diversité des publics et des fonctionnements intellectuels, il est profitable lorsque c'est possible d'envisager plusieurs démonstrations d'un même résultat. Cela peut être mis en pratique avec des raisonnements différents, en choisissant des registres variés (numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel), en recourant à des outils logiciels diversifiés. L'élève peut alors se voir proposer de choisir celle des démonstrations qu'il notera dans son cahier de cours.

Des démonstrations en plusieurs niveaux de détail

Il peut être intéressant également de donner les démonstrations en plusieurs niveaux de détail :

- niveau 1 : seulement le plan et les idées générales ;
- niveau 2 : démontrer chaque étape du plan, avec un partage des tâches différencié au sein de la classe, suivi d'une mise en commun ;
- niveau 3 : démonstration complète, en évitant une longueur excessive.

Là encore, l'élève, qui autoévalue sa propre aptitude de compréhension, peut choisir le niveau de détail pour la démonstration qu'il note dans son cahier de cours.

Commencer par traiter un exemple générique

Une autre piste consiste à démontrer un résultat sur un exemple générique. Il s'agit d'un exemple numérique ou d'un cas particulier dont le traitement approche une démonstration générale, en ce sens que les outils mobilisés et les modes de raisonnement sont assez facilement transférables au cas général. Le traitement d'un exemple générique n'a pas le statut d'une démonstration générale, mais il peut mobiliser les mêmes objectifs de formation. Dans certains cas, on peut s'en tenir à cet exemple en précisant qu'on admet le cas général.

Attendus pour tous

Pour engager tous les élèves, on peut développer uniquement le niveau 1 d'une démonstration, en dégageant le plan et les idées générales. Pour évaluer les élèves, il est possible de proposer une démonstration choisie dans une courte liste préalablement étudiée.

Approfondissements possibles

Pour certains élèves, par exemple ceux ayant un projet d'études scientifiques, on peut proposer des pistes d'approfondissement.

Plan du document

Dans son préambule, le programme de spécialité de première générale précise : « *Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme propose quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoir à la maison…* ».

La suite du document est calquée sur la ressource de seconde ; elle envisage de décliner les considérations générales précédemment détaillées pour plusieurs des démonstrations mentionnées dans le programme de première générale, choisies parmi les plus riches, les plus délicates à aborder ou les plus significatives. Dans la diversité des démonstrations proposées, l'accent est mis sur des preuves visuelles lorsqu'il en existe. Les trois dernières rubriques du document sont consacrées à des exemples d'intervention du raisonnement par l'absurde, du raisonnement par disjonction de cas et du raisonnement par contraposée, dans les démonstrations du programme ou dans quelques exercices.

Les démonstrations

Calcul du terme général d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique

Objectifs de formation

- Remettre en place le raisonnement par induction (voir ci-après).
- Mobiliser les définitions d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique.
- Tirer parti de la définition d'une suite par récurrence pour démontrer que deux suites sont égales.

Prérequis, motivation

- Le professeur réactive et précise la définition d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.
- Les élèves revoient préalablement les propriétés des puissances à l'aide de questions flash.
- À titre d'accroche, le professeur demande aux élèves sur des exemples de suites (u_n) de calculer un terme donné : u_{10}, u_{50}… Il fait ainsi ressortir l'intérêt de disposer d'une formule explicite.
- Le professeur réexplique le raisonnement par induction, qui amène à conjecturer une formule générale à partir de l'examen des premières valeurs. Il fait valoir qu'il ne s'agit pas d'une réelle démonstration en présentant des trompe-l'œil.
- Par exemple, la suite de terme général $u_n = n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + n$ vérifie $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 4$, ce qui amène à conjecturer que pour tout entier n, on a $u_n = n$. Évidemment, il n'en est rien puisque, par exemple, $u_5 = 125$.

Différentes démonstrations possibles

1. **Démonstration par sommation (ou produit) d'égalités**

Pour la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, le professeur demande aux élèves d'écrire la relation de récurrence aux rangs $1, 2, 3, \dots, n-1, n$:

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r$$

$$\vdots$$

$$u_{n-1} = u_{n-2} + r$$

$$u_n = u_{n-1} + r$$

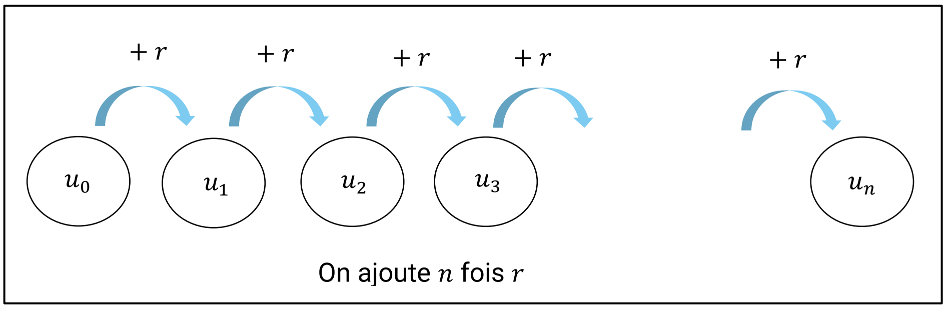
Il guide le calcul de sommation des égalités et la simplification, pour obtenir $u_n = u_0 + n\,r$.

Remarque : le calcul avec les points de suspension masque en fait un raisonnement par récurrence, qu'il n'est pas question d'évoquer à ce niveau.

On procède de même avec les suites géométriques, en effectuant le produit des égalités. La simplification se légitime en admettant que si le premier terme et la raison sont non nuls, chaque terme l'est aussi.

2. Démonstration visuelle

Pour la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, on utilise le schéma visuel suivant :



On procède de même pour les suites géométriques, en multipliant par q.

3. Démonstration utilisant la définition des suites récurrentes

Pour la suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q, les élèves conjecturent d'abord par l'examen des premières valeurs que, pour tout entier par n, on a $u_n = u_0 \times q^n$.

Le professeur met en place ou réactive le raisonnement utilisé : on considère la suite de terme général $v_n = u_0 \times q^n$, qui est a priori différente de (u_n).

Si l'on démontre que les suites (u_n) et (v_n) ont le même premier terme et vérifient la même relation de récurrence, alors ces deux suites sont égales.

Le reste n'est qu'un jeu d'écriture, qui peut être laissé aux élèves.

Remarque : ce raisonnement s'appuie sur le fait qu'une suite récurrente est déterminée par son premier terme et la relation de récurrence (du premier ordre). Ce résultat peut être utilisé de façon intuitive dès la classe de première, sans évoquer le raisonnement par récurrence sous-jacent, qui ne sera introduit qu'en spécialité de terminale.

On raisonne de même avec une suite arithmétique.

Pistes de différenciation

- Pour engager tous les élèves, chacune des démonstrations peut se conduire avec un exemple générique, que ce soit pour les suites arithmétiques ou géométriques. Toutefois, cela simplifie peu la démarche et demeure moins éclairant sur sa transférabilité. La principale piste de différenciation repose sur le choix possible de la preuve. Celle visuelle, notamment, est particulièrement simple.
- La troisième démonstration, plus rigoureuse mais plus abstraite, est sans doute difficile à présenter à tous les élèves. Le professeur peut cependant l'expliquer complètement pour les suites arithmétiques et demander aux élèves de l'adapter aux suites géométriques.

Approfondissements possibles

- Pour tous n et p entiers, relation entre $\mathrm{u_n}$ et $\mathrm{u_p}$ pour une suite arithmétique ou géométrique.
- Déterminer le terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence simple, comme par exemple $\mathrm{u_0} = 0$ et $\mathrm{u_{n+1}} = 2\,\mathrm{u_n} + 1$. Il s'agit de traiter un exemple et non de faire une étude générale des suites arithmético-géométriques.
- Comparaison des évolutions de capitaux, avec intérêt simple ou intérêt composé.
- Ramener l'étude du terme général d'une suite à celle d'une suite arithmétique ou géométrique grâce à une suite auxiliaire, qui est donnée par le professeur.

Compétences transférables

- Le principe du raisonnement par induction peut être dégagé pour conjecturer l'expression du terme général d'une suite, en précisant son utilisation et ses limites.
- Mettre en évidence le principe d'unicité d'une suite définie par son premier terme et une relation du type $\mathrm{u}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{f}(\mathrm{u}_{\mathrm{n}})$, ainsi que son utilisation pour démontrer que le terme général d'une suite est celui voulu. Ce principe sera réutilisé dans deux autres démonstrations du programme (pages 7 et 10).

Calcul de $1 + 2 + \cdots + n$

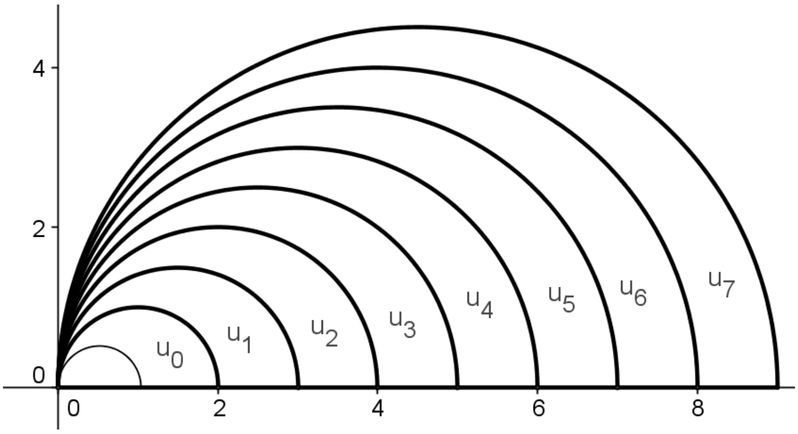
Objectifs de formation

- Tirer parti de la définition d'une suite définie par récurrence pour démontrer que deux suites sont égales.
- Mobiliser des techniques pour conjecturer une formule sommatoire et pour la démontrer.

Prérequis, motivation

Le professeur demande sous forme de défi de calculer la somme $1 + 2 + \cdots + 100$. Il peut évoquer une anecdote légendaire liant cette somme au mathématicien Carl-Friedrich Gauss.

À titre d'accroche, le professeur présente une situation dont l'étude fait intervenir la somme des termes d'une suite arithmétique. Par exemple, la figure ci-dessous représente des demi-cercles de diamètres $1, 2, 3$, etc.



Pour tout n entier naturel, le terme u_n est l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses et les deux demi-cercles consécutifs ayant pour diamètres $n + 2$ et $n + 1$.

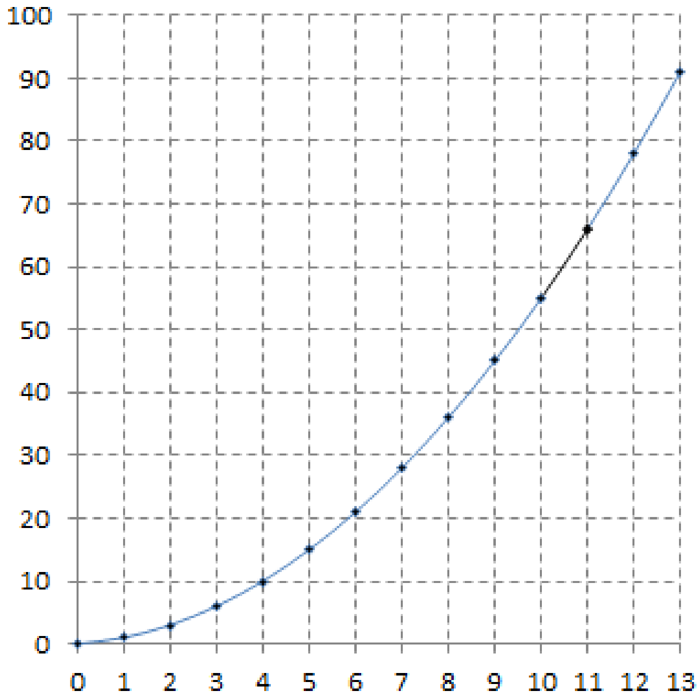
a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b) Calculer la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_7$.

Remarque : l'évidence géométrique donne du sens à la question et permet une vérification relativement simple.

Dans cette démonstration, un volet important de l'approche consiste à ce que les élèves conjecturent par eux-mêmes la formule de sommation, notamment pour la démonstration 3. Cela peut se présenter comme un défi.

Le professeur peut par exemple faire visualiser les différentes valeurs de la somme sur un graphique obtenu par un tableur.



La forme de la courbe obtenue permet de conjecturer une expression polynomiale de degré 2. L'utilisation de la « courbe de tendance » du tableur donne alors l'expression voulue en choisissant le menu « courbe polynomiale de degré 2 ».

Différentes démonstrations possibles

1. En doublant la somme

Le professeur guide le travail des élèves.

On pose $S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$. On réécrit S « à l'envers » : $S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$, puis on ajoute les deux expressions. En regroupant les termes occupant la même position, on obtient n termes tous égaux à $n+1$. On conclut en divisant la somme par 2.

2. En utilisant des polynômes du second degré

Les élèves établissent d'abord l'égalité $(a+1)^2 - a^2 = 2a + 1$ pour tout réel a. Le professeur guide la suite du raisonnement. On écrit cette égalité pour $a = 1$, $a = 2$, …, $a = n$, puis on somme toutes ces égalités. On en déduit l'égalité $(n+1)^2 - 1^2 = 2 \times (1 + 2 + \cdots + n) + n \times 1$.

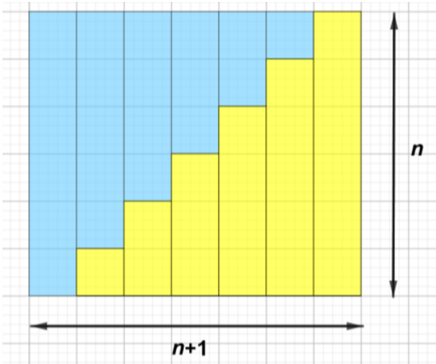
On isole enfin la somme $(1 + 2 + \cdots + n)$ afin d'obtenir le résultat.

3. En utilisant la définition des suites récurrentes (cf ici)

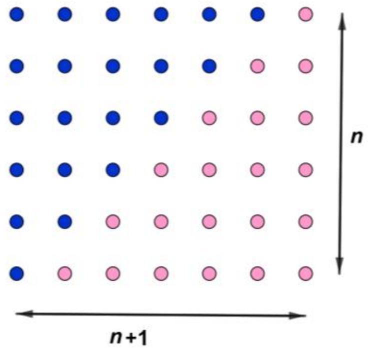
Les élèves conjecturent d'abord la formule. Le professeur réactive ainsi le raisonnement utilisé : si deux suites (u_n) et (v_n) ont même premier terme et vérifient la même relation de récurrence du premier ordre, alors ces deux suites sont égales.

Pour la suite, les élèves terminent en autonomie en posant $u_n = 1 + 2 + \cdots + n$ et $v_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

4. **Preuves visuelles**



Sous forme d'aires



Sous forme de constellations de points

Pistes de différenciation

- La piste de différenciation la plus solide consiste à faire choisir aux élèves la démonstration qu'ils comprennent le mieux.
- Pour tous les élèves, les démonstrations 1 et 4 peuvent s'effectuer sur un exemple générique.
- Les deux autres démonstrations s'appuient sur le calcul littéral et requièrent un degré d'abstraction plus élevé, notamment la démonstration 2. Cette dernière peut être donnée en travail personnel aux élèves montrant de l'appétence pour les mathématiques, la méthode pouvant se prolonger au calcul de la somme des carrés, des cubes (voire des puissances d'exposant plus grand) des premiers entiers (voir ci-après dans les approfondissements).

Approfondissements possibles

- Somme des n premiers entiers impairs : « Montrer que $1+3+5+\cdots+(2n-1)^2=n^2$.

  Dans cet exercice, les méthodes 1, 3 et 4 sont applicables, la méthode visuelle étant particulièrement évocatrice en ramenant les termes à l'aire de chevrons emboîtés et leur somme à celle d'un carré.
- Calcul de la somme $u_p+u_{p+1}+\cdots+u_{n-1}+u_n$ pour une suite arithmétique quelconque.
- Calcul de la somme des n premiers carrés, des n premiers cubes en adaptant la méthode des polynômes (démonstration 2). Par exemple, pour la somme des carrés, on obtient après une sommation le terme $(n+1)^3-1$ en fonction des sommes $(1+2+\cdots+n)$ et $(1^2+2^2+\cdots+n^2)$.
- Nombres polygonaux : triangulaires, carrés, pentagonaux, etc.[8]

Compétences transférables

Mettre en évidence ou réactiver le principe d'unicité d'une suite définie par son premier terme et une relation du type $u_{n+1}=f(u_n)$, ainsi que son utilisation pour démontrer que le terme général d'une suite est celui voulu. Ce principe peut être utilisé dans d'autres démonstrations du programme (pages 6 et 10).

[8] Voir par exemple *Le Livre des Nombres*, de John Conway et Richard Guy, Ed. Eyrolles.

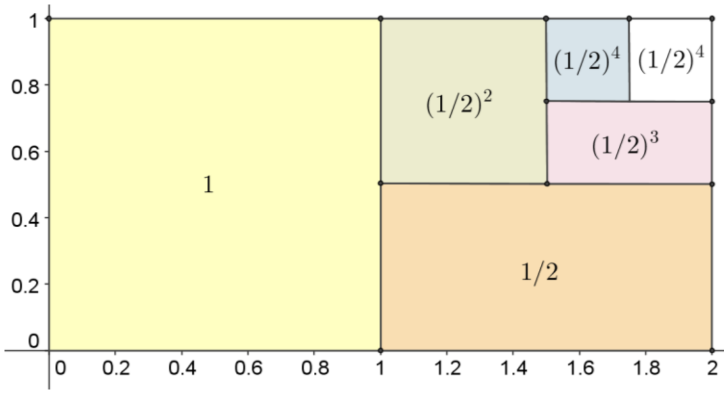
Calcul de $1 + q + \cdots + q^n$

Objectifs de formation

- Tirer parti de la définition d'une suite définie par récurrence pour démontrer que deux suites sont égales.
- Mobiliser des techniques pour conjecturer une formule de sommation et pour la démontrer.
- Ramener le traitement d'un quotient à celui d'un produit.

Prérequis, motivation

- Les élèves confortent les automatismes sur les suites géométriques : définition par récurrence, terme général, ainsi que sur la représentation graphique des termes d'une suite récurrente, utile pour la démonstration 3.
- Le professeur rappelle la méthode permettant de démontrer que deux suites sont identiques : même premier terme et même relation de récurrence, utile pour la démonstration 2.
- Les élèves ont obtenu ou retrouvé les égalités $(1-x)(1+x) = 1-x^2$ et $(1-x)(1+x+x^2) = 1-x^3$ par un travail en amont sur les automatismes. Le professeur les incite à développer la nouvelle expression $(1-x)(1+x+x^2+x^3)$, puis à conjecturer une formule générale.
- Les élèves vérifient l'égalité conjecturée $(1-q)(1+q+\cdots+q^n) = 1-q^{n+1}$ ou, en changeant deux signes, $(q-1)(1+q+\cdots+q^n) = q^{n+1}-1$, sur des exemples numériques permettant un contrôle.
  - Avec $q = 10$, on a $1 + 10 + \cdots + 10^n = 1 \ldots 1$ ($n+1$ chiffres 1).
    Donc $9 \times 1 \ldots 1 = 9 \ldots 9$ ($n+1$ chiffres 9).
  - Avec $q = 2$, il est aisé de remarquer que $1 + 2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ en observant les premières valeurs sur un tableur.
  - Avec $q = \frac{1}{2}$, on peut, dans le segment $[0,2]$, considérer des intervalles contigus de longueurs $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}$, et constater, pour une valeur donnée de n, qu'il reste un intervalle de longueur $\frac{1}{2^n}$ non recouvert. Alternativement, la figure ci-après montre, avec les aires que, pour $n = 4$, la somme est égale à $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^4$, ou encore $2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)$; cela déclenche une conjecture en remplaçant 4 par n.



Différentes démonstrations possibles

Les élèves traitent immédiatement le cas $q = 1$.

Dans la suite, le professeur suppose que $q \neq 1$ et pose $S_n = 1 + q + \cdots + q^n$.

Le résultat $S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ ou $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ a été conjecturé.

Le professeur ramène sa démonstration à celle de l'égalité à $(1-q) \times S_n = 1 - q^{n+1}$.

1. Le professeur, s'appuyant sur le résultat conjecturé en amont, organise le calcul de $(1-q) \times S_n$. Les élèves appliquent la distributivité, organisent et simplifient le calcul posé :

$$S_n = 1 + q + \cdots + q^n$$
$$-q\, S_n = -q - \cdots - q^n - q^{n+1}$$

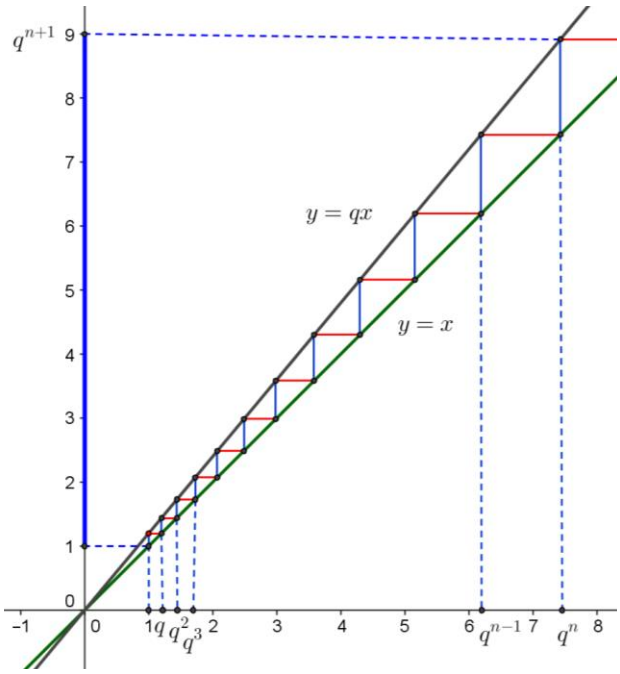
   L'égalité $(1-q) \times S_n = 1 - q^{n+1}$ en résulte en additionnant les deux égalités.

2. Le professeur demande aux élèves d'utiliser le principe d'unicité d'une suite définie par récurrence (cf. ici) en posant $u_n = (1-q) \times S_n$ et $v_n = 1 - q^{n+1}$. Les élèves démontrent que les suites (u_n) et (v_n) sont égales (même premier terme, même relation de récurrence) et concluent.

3. On peut donner une preuve visuelle en termes de longueurs (figure ci-après).

   On a choisi pour le dessin $q > 1$, la visualisation s'adapte aisément lorsque $q < 1$.

   La figure représente les termes de la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = q\, u_n$.



Les n premiers segments verticaux (en bleu) ont pour longueurs respectives $q - 1$, $q^2 - q = q(q-1)$, …, $q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$.

La somme des longueurs est donc égale à $S_n(q-1)$.

Par ailleurs, si l'on met « bout à bout » ces n segments, la longueur correspondante, représentée par le segment bleu sur l'axe des ordonnées, est égale à $q^{n+1} - 1$.

Pistes de différenciation

- Les démonstrations 1 et 2 peuvent se réduire à leur plan (niveau 1).
- Chacune des trois démonstrations peut être conduite avec un exemple générique ; par exemple $q = 3$ ou $q = 1{,}2$ comme sur le graphique de la démonstration 3. Le traitement avec $q = 10$ offre l'avantage supplémentaire d'un contrôle de chaque étape, à l'aide de l'écriture décimale.
- Dans la démonstration 3, on peut aussi réduire la difficulté due à la factorisation littérale de l'expression $q^{n+1} - q^n = q^n(q - 1)$ en remarquant que chaque segment bleu est un agrandissement du précédent dans le rapport q ; la propriété de Thalès ou l'homothétie de centre O de rapport q peuvent être mobilisées à cet effet.

  Il est à remarquer que la figure fonctionne comme une « machine à multiplier » par q.

Approfondissements possibles

- Calcul de la somme $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n$ pour une suite arithmétique ou géométrique quelconque.
- Calcul de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmético-géométrique.
- Application en économie : remboursement d'un emprunt par mensualités constantes.

  Exemple : pour rembourser un emprunt de $50\ 000$ euros au taux de $0{,}2\ \%$ mensuel en 60 mensualités, dont la première a lieu 3 mois après l'emprunt, on cherche le montant m (en euro) de chaque mensualité. Pour cela, on actualise les deux sommes (celle empruntée et celle remboursée) au moment de l'emprunt. La n-ième mensualité remboursée, actualisée à ce moment, vaut $m \times 1{,}002^{-n-2}$, en rappelant que la première mensualité est remboursée trois mois après l'emprunt. On est donc ramené à déterminer m vérifiant l'égalité :

  $1{,}002^{-3}\, m \times (1 + (1{,}002^{-1}) + \cdots + (1{,}002^{-1})^{59}) = 50\ 000.$

  Réponse : $m \approx 881{,}4$.

Compétences transférables

Le fait de ramener une égalité de quotients à celle de produits mérite d'être signalé. On retrouve cela dans certains exercices du programme de première : équations comportant des quotients, traitement de certaines égalités algébriques, etc.

Il est utile également de mettre l'accent sur le principe d'unicité d'une suite définie par son premier terme et une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Ce principe peut être utilisé dans d'autres démonstrations du programme (pages 6 et 7) et dans des exercices, pour démontrer que le terme général d'une suite est égal à une expression donnée ou conjecturée.

Fonction dérivée de la fonction « carré », de la fonction « inverse »

Objectifs de formation

- Mettre en œuvre la définition du nombre dérivé pour démontrer des résultats utiles.
- Exploiter différents registres relatifs à la dérivation : graphique, algébrique, géométrique.
- Roder le principe du raisonnement déductif dans une démonstration théorique.

Prérequis, motivation

Le professeur installe les prérequis et développe les approches proposées ci-après à l'aide d'activités mentales, de questions flash, de QCM, de Vrai/Faux, ou les anticipe par des travaux hors la classe.

- Le professeur réactive les connaissances sur les fonctions « carré » et « inverse » et s'assure que les allures de leurs représentations graphiques relèvent d'un automatisme.
- Les élèves s'entraînent à manipuler et simplifier formellement des quotients algébriques tels que :

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{h}\,;\ \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}\,;\ \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h}$$

- Le professeur réactive les aspects théoriques relatifs à la dérivation et lève les obstacles incontournables : limite intuitive du taux d'accroissement, lien entre nombre dérivé et tangente, passage du nombre dérivé à la fonction dérivée.
- *Conjectures par une approche numérique*

Dans un premier temps, les élèves calculent à la main le taux d'accroissement en a pour $a = 5$ et $h = 0{,}001$: pour la fonction carré : $\frac{5{,}001^2 - 5^2}{0{,}001} = 10{,}001$; pour la fonction inverse : $\frac{\frac{1}{5{,}001} - \frac{1}{5}}{0{,}001} \approx -0{,}039\,99$.

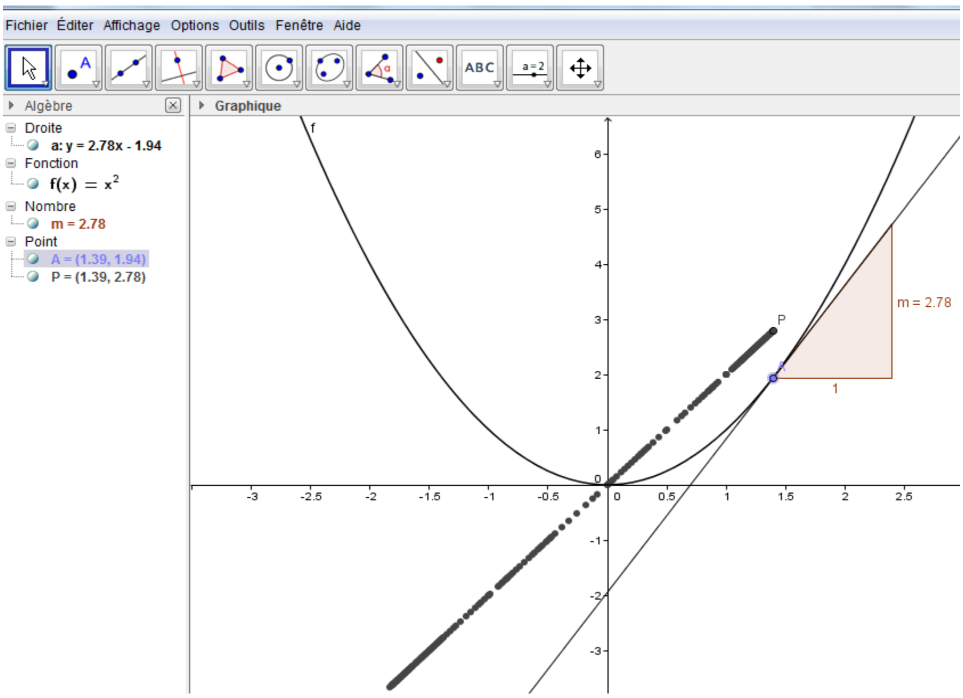
Ils peuvent observer ce même calcul sur un tableur pour plusieurs valeurs entières de a, allant de 1 à 20, pour conjecturer que le nombre est proche de $2a$ dans un cas, de $-\frac{1}{a^2}$ dans l'autre.

- *Conjectures par une approche graphique*

Les élèves observent sur un logiciel de géométrie dynamique, en partant du tracé de la fonction carré, le tracé point par point de celui de la fonction dérivée.

Dans la figure ci-contre, le menu « Trace » du logiciel *GeoGebra* a été utilisé à cet effet.

On peut réactiver à cette occasion le lien entre la valeur du nombre dérivé et le coefficient directeur de la tangente.



La conjecture est aisée avec la fonction carré car on reconnaît naturellement une droite. Pour la fonction inverse, l'observation doit être guidée par le professeur. Les élèves peuvent en observant le graphique conjecturer que la fonction dérivée est du type de $x \mapsto -\frac{1}{x}$ ou $x \mapsto -\frac{1}{x^n}$ pour n entier.

Une analyse plus précise du nombre dérivé affiché peut alors donner la valeur de n.

Différentes démonstrations possibles

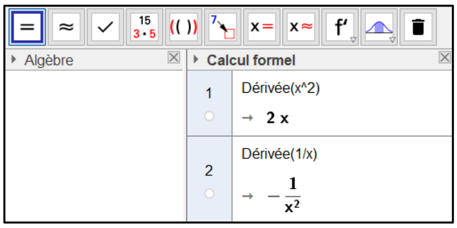
1. Calcul effectif du taux d'accroissement en a, simplification et passage à la limite lorsque h tend vers 0 , avec $h \neq 0$.

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h \text{ tend vers } 2a\ ; \quad \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)} \text{ tend vers } -\frac{1}{a^2}.$$

2. Calcul du taux d'accroissement sur un exemple numérique, par exemple $a = 5$ ou $a = 7$. Dans ce cas, l'exemple risque de masquer la forme de la dérivée : pour le premier taux, on obtient $10 + h$ et non pas $2 \times 5 + h$. Il faudra observer le résultat pour plusieurs valeurs de a pour conjecturer la forme $2a + h$.

Pistes de différenciation

- Les élèves peuvent choisir de noter dans leur cahier la démonstration qui leur convient le mieux.
- La deuxième n'est pas une démonstration générale, mais peut être considérée comme une preuve dans un cas particulier. Elle souscrit aux mêmes objectifs de formation. En remplaçant la valeur numérique par une lettre a, si l'on a mis le résultat sous la forme $2a + h$, permet de généraliser la preuve : c'est le sens du vocable « exemple générique ».
- Pour une différenciation, on peut se contenter d'obtenir l'expression de la fonction dérivée à l'aide du calcul formel, à la calculatrice ou à l'aide d'un logiciel. Ci-contre, on a utilisé celui de *GeoGebra*.



Approfondissements possibles

- En utilisant la définition du nombre dérivé, retrouver la fonction dérivée d'autres fonctions, définies par : $f(x) = x^3$; $f(x) = kx^2$ avec $k \neq 0$; $f(x) = (1+x)^2$; $f(x) = \frac{k}{x}$ avec $k \neq 0$; $f(x) = \frac{1}{1+x}$.
- Tangentes à la parabole d'équation $y = x^2$: dans un repère orthonormé d'origine O, la tangente en $\mathrm{A}(a, a^2)$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{a}{2}$ lorsque $a \neq 0$. Cela permet une construction géométrique des tangentes à la parabole.
- Tangentes à l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$: si $a \neq 0$, la tangente en $\mathrm{A}\left(a, \frac{1}{a}\right)$ coupe les axes de coordonnées en K et L . Alors : A est le milieu du segment $[\mathrm{KL}]$; l'abscisse de K est double de celle de A ; l'ordonnée de L est double de celle de A. Cela permet une construction géométrique des tangentes à l'hyperbole.
- Approximations numériques utilisées en physique : lorsque u est proche de zéro, on a :

$$(1+u)^2 \approx 1 + 2u\ ;\ (1-u)^2 \approx 1 - 2u\ ;\ \frac{1}{1+u} \approx 1 - u\ ;\ \frac{1}{1-u} \approx 1 + u.$$

Ces approximations résultent de celle, plus générale, $f(a+h) \approx f(a) + h\,f'(a)$, pour les deux fonctions considérées, au point $a = 1$. Elles peuvent être exploitées avec des exemples numériques, qui sont peut-être plus évocateurs :

$$1{,}01^2 \approx 1{,}02;\ \ 0{,}99^2 \approx 0{,}98;\ \frac{1}{1{,}01} \approx 0{,}99;\ \frac{1}{0{,}99} \approx 1{,}01;\ \text{etc.}$$

- Problèmes relatifs aux tangentes à une parabole ou à une hyperbole

  Exemples :

  a) Du point $\mathrm{A}(1,-2)$, peut-on mener des tangentes à la parabole d'équation $y = x^2$?

  b) En quel(s) point(s) de la parabole d'équation $y = (x+1)^2$ peut-on mener une tangente passant par l'origine ?

  c) On dit que deux courbes sont orthogonales lorsqu'elles se coupent et admettent en leur(s) point(s) d'intersection des tangentes orthogonales.

  Les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = \frac{1}{x}$ sont-elles orthogonales ? Les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = -\frac{1}{3}x^2 + 1$? Les courbes d'équations $y = \frac{1}{x}$ et $y = \frac{1}{2-x}$?

Compétences transférables

La méthode de calcul du nombre dérivé à partir de la définition doit être mise en exergue, en dégageant le plan suivant :

- former le taux d'accroissement en a : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$;
- simplifier ce nombre par h lorsque c'est possible (cela l'est dans bien des cas) ;
- faire « tendre » h vers 0 ; cela revient souvent à remplacer h par 0 dans une expression simplifiée du taux d'accroissement.

Dans les problèmes numériques, l'approximation $f(a+h) \approx f(a) + h\,f'(a)$ mérite d'être mise en évidence.

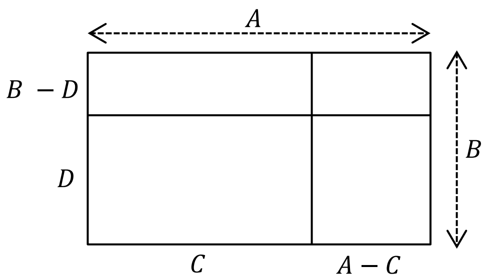
Fonction dérivée d'un produit

Objectifs de formation

- Mettre en œuvre la définition du nombre dérivé pour étudier la dérivée d'un produit.
- Conjecturer une propriété sur la dérivation grâce à une approche physique.
- Utiliser le registre graphique pour trouver l'idée d'une démonstration.

Prérequis, motivation

- Le professeur réactive les aspects théoriques relatifs à la dérivation et lève les obstacles incontournables : taux d'accroissement, limite intuitive d'une expression, passage du nombre dérivé à la fonction dérivée. À cet effet, des questions flash posée en amont s'avèrent profitables.
- Un calcul algébrique est nécessaire en amont d'une démonstration générale : quatre réels A, B, C, D étant donnés, exprimer $\mathrm{AB} - \mathrm{CD}$ en fonction des différences $\mathrm{A} - \mathrm{C}$ et $\mathrm{B} - \mathrm{D}$. Le découpage de la figure, interprété en termes d'aires, suggère l'égalité :



$$AB - CD = (A - C)B + (B - D)C.$$

Les élèves l'établissent aisément.

- Le professeur propose un défi, pour servir d'accroche : « La dérivée du produit uv est-elle égale à $\mathrm{u'v'}$? ».

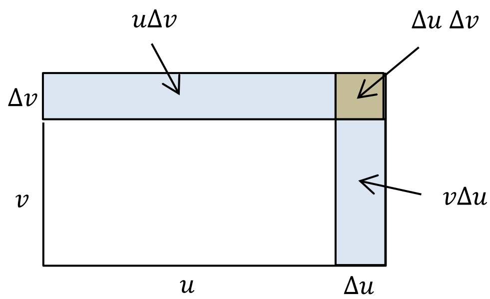
Différentes démonstrations possibles

On considère deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I, et a un point de I.

1. Démonstration géométrique ou conjecture

La visualisation proposée doit permettre à tous de conjecturer le nombre dérivé. Elle peut être considérée comme une preuve visuelle pour les élèves qui ne maîtrisent pas la démonstration 2.

Le professeur établit le lien entre le taux d'accroissement en physique de la fonction u en a, noté $\frac{\Delta u}{\Delta a}$, et le nombre dérivé $u'^{(a)}$, qui est la limite lorsque $h = \Delta a$ tend vers 0 de la fonction $h \mapsto \frac{u(a+h)-u(a)}{h}$. Ce peut être l'occasion d'évoquer la naissance du calcul infinitésimal au XVIIe siècle, en citant Pierre de Fermat, Gottfried Leibniz et Isaac Newton.



Dans la figure ci-contre, $\Delta(uv)$ est l'aire du grand rectangle à laquelle on retranche celle du rectangle blanc, égale à uv. Lorsque Δu et Δv sont petits, leur produit $\Delta u\ \Delta v$ peut être négligé, donc $\Delta(uv)$ est proche de $u\Delta v + v\Delta u$, qui représente l'aire totale colorée en bleu.

L'approximation $\Delta(uv) \approx u\Delta v + v\Delta u$ autorise à conjecturer que $(uv)' = uv' + u'v$.

2. Démonstration classique (guidée par le professeur)

On mobilise le prérequis $AB - CD = (A - C)B + (B - D)C$, avec $A = u(a + h)$, $B = v(a + h)$, $C = u(a)$, $D = v(a)$.

On en tire :

$$\frac{u(a+h)\,v(a+h) - u(a)v(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times u(a)$$

Le professeur doit alors expliquer les passages à la limite, qui sont délicats, afin de conclure. En particulier, le fait que $\lim_{h\to 0} v(a + h) = v(a)$ résulte de la dérivabilité en a de v si on la traduit par l'égalité $v(a + h) = v(a) + h\,\tau(h)$, en notant τ la fonction « taux d'accroissement » de v en a.

Remarque : la méthode algébrique utilisée dans la démonstration 2 se base sur un découpage d'un rectangle en quatre parcelles, comme dans la démonstration 1. Cette proximité n'est pas due au hasard car l'idée est analogue. La démonstration 2 pourrait d'ailleurs être conduite en découpant l'aire $AB - CD$ en trois termes, avec des écritures un peu plus longues.

Pistes de différenciation

- La démonstration 2 est la seule « vraie » démonstration. Pour les élèves qui n'en maîtrisent pas tous les aspects calculatoires, on peut se contenter du niveau 1, selon le plan suivant : a) écrire le taux d'accroissement de la fonction uv ; b) décomposer le calcul en faisant apparaître les taux d'accroissements séparés de u et de v ; c) passer à la limite.
- On peut remplacer a par une valeur numérique (exemple générique), mais la simplification est à peine perceptible dans ce cas.
- La démonstration 1 mérite d'être présentée à tous de façon à établir le lien avec le raisonnement et les notations du physicien. Les élèves les plus fragiles peuvent s'en contenter.
- Pour différencier, on peut aussi se contenter d'obtenir l'expression de la dérivée d'un produit à l'aide du calcul formel, à la calculatrice ou à l'aide d'un logiciel. Ci-après, on a programmé en *Python*, avec le module complémentaire « simpy », le calcul de la dérivée d'un produit de deux fonctions ; avec $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

```
from sympy import *

def derive(u,v):
    x=Symbol('x')
    return diff(u(x)*v(x),x)

def f(x):
    return x

def g(x):
    return sqrt(x)
```

En appelant la fonction « *derive* » pour ces deux fonctions, l'affichage dans la console *Python* est le suivant :

```
>>> derive(f,g)
3*sqrt(x)/2
>>>
```

Approfondissements possibles

- Retrouver les fonctions dérivées de fonctions connues en appliquant la formule de dérivée d'un produit.
- Obtenir la dérivée d'un quotient à partir de celle d'un produit et de celle de l'inverse.
- Dérivée de $x \mapsto x^3$, …, $x \mapsto x^n$, avec n entier naturel.
- Dérivée de u^2, u^3, …, u^n, lorsque u est une fonction dérivable et n un entier naturel.
- Racines doubles d'un polynôme : on dit qu'un réel a est racine double d'un polynôme P si ce polynôme est factorisable par $(x-a)^2$, autrement dit s'il existe un polynôme R tel que
$$P(x) = (x-a)^2 R(x).$$

On peut montrer en approfondissement que :

a) Si P est de degré supérieur ou égal à 1, pour tout réel a, il existe un polynôme Q tel que :
$$P(x) = P(a) + (x-a)\,Q(x).$$

b) P est factorisable par $(x-a)^2$ si et seulement si $P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$.

Compétences transférables

Comme dans la démonstration précédente, la méthode de calcul du nombre dérivé à partir de la définition doit être mise en valeur.

Dans les notations liées au calcul différentiel, la correspondance entre mathématiques et physique mérite un point d'étape. Ce doit être un objet de travail coordonné entre les deux disciplines.

La vision géométrique pour le traitement d'un produit intervient dans de nombreuses situations : formule de distributivité au collège, identités remarquables en seconde, dérivée d'un produit dans la démonstration étudiée. Il convient de développer cette vision en toute occasion.

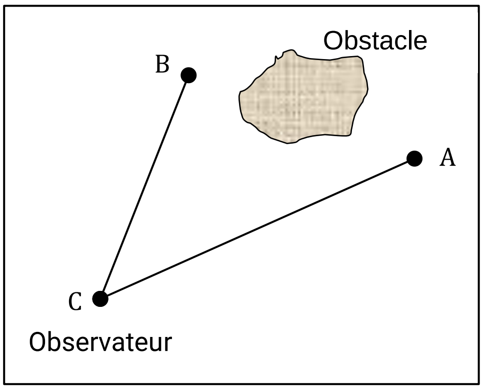
Formule d'Al-Kashi[9]

Objectifs de formation

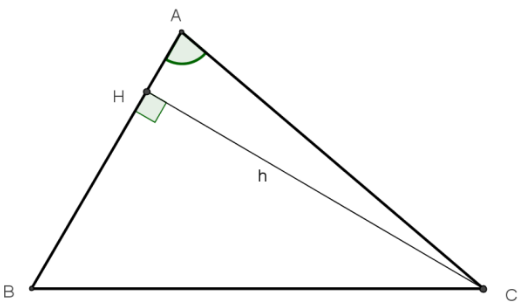
- Utiliser les propriétés du produit scalaire et comprendre leur efficacité.
- Enrichir la palette des outils permettant de traiter des problèmes de géométrie plane.

Prérequis, motivation

- L'élève révise au préalable, par exemple par des questions flash, la définition des lignes trigonométriques et le théorème de Pythagore.
- Le professeur réactive, toujours par un travail sur les automatismes, les propriétés du produit scalaire, utiles dans la démonstration préconisée : identités remarquables, formule du cosinus.
- Un problème de mesure d'une distance inaccessible peut servir d'accroche. On peut par exemple évoquer le problème historique de la triangulation plane en topographie, lorsque l'observateur en C peut mesurer la distance à deux points fixes A et B et l'angle sous lequel il voit ces deux points, mais lorsque le terrain rend impossible la mesure directe de la distance entre les points A et B.



- Le cas de la triangulation plane de la Terre peut donner lieu à une recherche documentaire sur Jacques Cassini, Pierre Méchain et Jean-Baptiste Delambre au XVIIIe siècle.
- Les élèves entrent dans la problématique par un questionnement : « Dans un triangle qui n'est pas rectangle, peut-on trouver la longueur d'un côté connaissant les longueurs des deux autres côtés ? » ; « Sinon, quelle mesure d'angle doit-on connaître également ? ». À ce niveau, le professeur peut rappeler les cas d'égalité des triangles (cycle 4), qui permettent de connaître tous les éléments métriques d'un triangle à partir de trois d'entre eux. On peut donc dans un triangle connaître la mesure d'un angle à partir de celle des trois côtés, ou la mesure du troisième côté à partir de celles des deux autres et d'un angle bien choisi. La formule d'Al-Kashi est l'outil qui permettra d'y parvenir.
- Les élèves résolvent en amont un cas particulier à partir des résultats élémentaires du cycle 4 : « Dans un triangle ABC, on donne $\mathrm{AB} = 3$ cm, $\mathrm{AC} = 4$ cm et $\widehat{\mathrm{A}} = 80°$. Calculer BC. »
- À l'appui, un questionnement peut être donné :



  a) Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). On pose $a = \mathrm{BC}$, $h = \mathrm{CH}$ et $x = \mathrm{AH}$.

  Ainsi $\mathrm{BH} = 3 - x$.

  En écrivant le théorème de Pythagore dans deux triangles rectangles, démontrer les égalités $a^2 = h^2 + (3 - x)^2$, puis $a^2 = 4^2 - x^2 + (3 - x)^2$.

  b) En déduire que $a^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 4 \cos 80°$, puis calculer $a = \mathrm{BC}$.

---

[9] Ghiyath Al-Kashi, mathématicien perse (1380-1429), généralise le théorème de Pythagore aux triangles quelconques. Son résultat est parfois appelé *Théorème de Pythagore généralisé* ou *Loi des cosinus.*

Différentes démonstrations possibles

On considère un triangle ABC quelconque, on note $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{CA}$, $c = \mathrm{AB}$, $\alpha = \widehat{\mathrm{A}}$, $\beta = \widehat{\mathrm{B}}$, $\gamma = \widehat{\mathrm{C}}$.

1. **Avec le produit scalaire (les élèves travaillent en autonomie partielle, avec guidage possible)**

On a : $a^2 = \mathrm{BC}^2 = \overrightarrow{\mathrm{BC}}^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)^2 = \overrightarrow{\mathrm{AC}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 - 2\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

On en déduit, en évaluant le produit scalaire par la formule du cosinus :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha.$$

2. **Avec le théorème de Pythagore**

La démonstration est analogue à celle de l'exemple générique, en posant $h = \mathrm{CH}$ et $x = \mathrm{AH}$. Elle doit être guidée par le professeur.

On procède par disjonction de cas, selon que l'angle $\widehat{\mathrm{A}}$ est aigu ou obtus. Dans le premier cas, on a $\mathrm{BH} = a - x$, dans le deuxième $\mathrm{BH} = a + x$; dans les deux cas, $x = b\cos\alpha$.

Comme dans le dernier point du prérequis, la démonstration se conduit en appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles BCH puis ACH.

3. **Démonstrations visuelles**

De telles démonstrations, basées sur les aires, existent et ont souvent un intérêt historique. C'est ainsi que l'une d'elles provient d'Euclide, une autre d'Al-Kashi lui-même. Ces démonstrations sont relativement complexes et demandent un calcul annexe pour être comprises. C'est pourquoi elles ne sont pas présentées dans ce document ; on peut toutefois les proposer en classe à titre d'approfondissement.

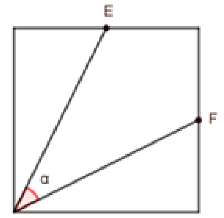
Voir par exemple un article de Wikipédia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_des_cosinus.

Pistes de différenciation

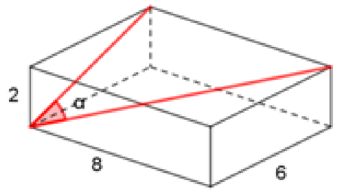
- La démonstration complète n'étant guère plus longue que son plan, la piste de différenciation la plus solide réside dans le choix entre les deux premières démonstrations.
- Pour éviter une trop grande abstraction à certains, on peut conduire la première démonstration en donnant des valeurs numériques aux longueurs et angle, afin de vérifier à la fin par la mesure la longueur inconnue.
- L'objectif de conduire avec tous la première démonstration est de montrer la puissance du produit scalaire et sa simplicité d'utilisation, dès lors que l'on maîtrise les propriétés de linéarité.

Approfondissements possibles

- Formule des sinus, toujours avec l'accroche topographique.
- Formule de l'aire dans un triangle : $S = \frac{1}{2}\text{bc} \sin \alpha = \frac{1}{2}\text{ca} \sin \beta = \frac{1}{2}\text{ab} \sin \gamma$.
- Calculs de distances et d'angles dans le plan et l'espace. Exemples :



Dans le carré ci-dessus, E et F sont des milieux de côté. Montrer que $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.



Dans le pavé ci-dessus, calculer α

- Calcul de la longueur des diagonales d'un polygone régulier de côté donné.

Compétences transférables

Il convient de mettre en évidence dans la démonstration 1 des éléments de calcul vectoriel qui seront très souvent réutilisés. Cela concerne d'une part le passage du carré des distances au carré scalaire, dans l'écriture $a^2 = \mathrm{BC}^2 = \overrightarrow{\mathrm{BC}}^2$, d'autre part l'application de la relation de Chasles par l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$

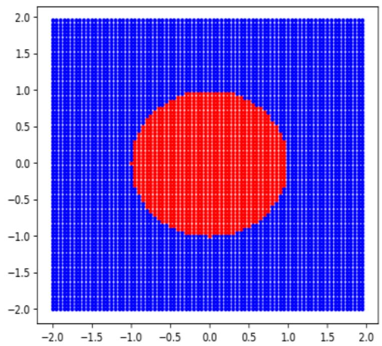
Objectifs de formation

- Exploiter les propriétés du produit scalaire et comprendre leur efficacité.
- Pour certaines démonstrations, utiliser un raisonnement par double inclusion pour démontrer l'égalité de deux ensembles.

Prérequis, motivation

- Le professeur vérifie que les automatismes relatifs au produit scalaire sont installés, en fonction des démonstrations qui seront proposées : définition, lien avec le projeté orthogonal, formule du cosinus, propriétés algébriques, expression analytique dans une base orthonormée.
- Pour les démonstrations 1 et 2, le professeur peut proposer en étude préalable (exercice en classe ou travail personnel) de démontrer le théorème du triangle rectangle inscrit dans un cercle avec les outils du collège ; deux énoncés séparés, réciproques l'un de l'autre, sont recommandés.
- Le professeur peut proposer aux élèves de conjecturer la nature de l'ensemble cherché en faisant visualiser une image obtenue avec le logiciel Python. Sur la figure ci-contre, avec les points $\mathrm{A}(-1{,}0)$ et $\mathrm{B}(1{,}0)$, on a représenté en rouge les points M du plan vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} < 0$ et en bleu ceux vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} > 0$.

  Les élèves doivent conjecturer la nature de l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$.



Remarque : il n'est pas utile de faire travailler les élèves sur le programme utilisé. L'intérêt didactique de cette approche repose sur le fait que le régionnement renforce l'image mentale de l'ensemble associé à l'égalité.

Différentes démonstrations possibles

Il est proposé quatre démonstrations utilisant le produit scalaire. Dans chaque cas, on se donne deux points du plan A et B distincts ; l'idée est de mettre en œuvre un raisonnement par double inclusion pour montrer que deux ensembles sont identiques : d'une part, l'ensemble E des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$; d'autre part, le cercle C de diamètre $[\mathrm{AB}]$. On peut remarquer comme une évidence le fait que les points A et B appartiennent au cercle C.

Les démonstrations 1 et 2 requièrent la connaissance de la propriété du triangle rectangle inscrit, qui doit alors être étudiée en amont (voir ci-avant, dans les prérequis). La démonstration 4 demande d'avoir étudié au préalable les équations de cercles.

1. Avec la définition du produit scalaire (le professeur guide, les élèves résolvent)

Si $\mathrm{M} \in E$, distinct de A et B, alors l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$ implique que le triangle AMB est rectangle en M, donc $\mathrm{M} \in C$ d'après la propriété du triangle rectangle inscrit. Cela prouve que $E \subset C$.

Si $\mathrm{M} \in C$, alors soit $\mathrm{M} = \mathrm{A}$, soit $\mathrm{M} = \mathrm{B}$, soit le triangle AMB est rectangle en M ; dans chaque cas, on a bien $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$, donc $C \subset E$. Conclusion $E = C$.

2. Avec la formule du cosinus

On procède comme pour la démonstration 1, en utilisant l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \mathrm{MA}.\mathrm{MB}.\cos\widehat{\mathrm{M}}$, lorsque M est distinct de A et B.

3. Avec la relation de Chasles et les propriétés de linéarité

On note I le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$. Alors $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{MI}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{MI}}.\left(\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}\right) + \overrightarrow{\mathrm{IA}}.\overrightarrow{\mathrm{IB}}$.

Compte tenu des égalités $\overrightarrow{\mathrm{MI}}^2 = \mathrm{MI}^2$, $\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IA}}.\overrightarrow{\mathrm{IB}} = \left(-\frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right).\left(\frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{AB}^2$, il vient : $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \mathrm{MI}^2 - \frac{1}{4}\,\mathrm{AB}^2$. Ce résultat est communément désigné par « théorème de la médiane ».

L'égalité $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$ équivaut donc $\mathrm{MI}^2 = \frac{1}{4}\,\mathrm{AB}^2$, soit encore $\mathrm{MI} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$. D'où la conclusion.

4. Avec les coordonnées (si les équations de cercles ont été étudiées)

Le professeur peut guider la mise en place d'un repère orthonormal et poser les notations : $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$, $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B})$, $\mathrm{M}(x, y)$, $\mathrm{I}(x_\mathrm{I}, y_\mathrm{I})$ avec $x_\mathrm{I} = \frac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2}$ et $y_\mathrm{I} = \frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}$.

Les élèves ramènent la condition $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$ à la condition équivalente :

$$(x - x_\mathrm{A})(x - x_\mathrm{B}) + (y - y_\mathrm{A})(y - y_\mathrm{B}) = 0$$

Guidés par le professeur, les élèves habiles en calcul littéral peuvent ramener l'équation à celle réduite d'un cercle : $(x - x_\mathrm{I})^2 + (y - y_\mathrm{I})^2 = \frac{1}{4}[(x_\mathrm{A} - x_\mathrm{B})^2 + (y_\mathrm{A} - y_\mathrm{B})^2]$. Ils concluent alors.

Pistes de différenciation

- Le choix de la démonstration est une piste sérieuse de différenciation.
- Chacune d'elles présente cependant un certain nombre de difficultés. Aussi, avec les élèves les plus fragiles, le plan seul peut être mis en exergue et noté dans les cahiers.
- La démonstration 4 peut être développée avec un exemple générique, par exemple en fixant les points $\mathrm{A}(-1,0)$ et $\mathrm{B}(1,0)$ comme dans l'approche initiale.

Approfondissements possibles

- Si la démonstration 3 a été présentée, il est possible d'exploiter le théorème de la médiane pour calculer des éléments métriques d'un triangle.

- Étude d'autres lignes de niveau, telles que :

    - $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\vec{u} = k$ (A, $\vec{u}$ et k sont un point, un vecteur, un réel fixés) ;

    - $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = k$ et $\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = k$ (A et B points fixés, k réel fixé).

Remarque : l'étude de la condition $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$ dans l'espace pourra être menée en classe de terminale, à titre de prolongement.

Compétences transférables

Parmi les compétences liées au raisonnement, le professeur peut faire ressortir la démonstration de l'égalité de deux ensembles par double inclusion.

Plusieurs compétences géométriques méritent d'être érigées en modèle, selon la démonstration choisie : les différentes caractérisations d'un cercle (géométrique, analytique), l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{MI}}^2 = \mathrm{MI}^2$ liant le produit scalaire à la distance, l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}} = \vec{0}$ qui caractérise le milieu.

Différents types de raisonnement

Le programme de l'enseignement de spécialité de première indique : « Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas, par l'absurde, par contraposée, et en découvrent la structure. »

Il s'agit ici de faire un point sur ces divers types de raisonnement. Il est bon de rappeler d'abord qu'au niveau du lycée, on n'entre pas dans des considérations de logique formelle, et les raisonnements produits relèvent bien sûr de la compétence « Raisonner » mais aussi de la compétence « Communiquer ». Autrement dit, distinguer divers types de raisonnement présente l'intérêt de mettre en évidence divers types de rédaction, facilitant la communication, soit en émission (mise en forme d'une démonstration par l'élève), soit en réception (comprendre une démonstration produite par une autre personne).

Raisonnement par disjonction de cas

Principe, dégagé par le professeur

Pour démontrer une proposition P portant sur un ensemble E d'objets (nombres, points…), on démontre la propriété sur des sous-ensembles E_1, E_2… disjoints deux à deux (« disjonction »), dont la réunion est égale à E. Le professeur peut à cette occasion introduire le terme « partition ». Le cas le plus simple est celui où il y a deux cas, par lequel il est judicieux de commencer.

Rédaction

Pour rédiger une disjonction de cas, il est important d'introduire la disjonction par une phrase de la forme « Distinguons deux cas », « On considère les trois cas suivants » etc. La validité du raisonnement repose sur le fait qu'on a bien une partition, ce qui peut être immédiat (par exemple si on a deux cas, l'un étant la négation de l'autre) ou nécessiter une justification. Une fois les cas bien définis, il s'agit de rédiger dans les divers cas, en prenant soin de bien les introduire.

Exemples de démonstrations de notions du programme de première

- La démonstration 2 du théorème d'Al-Kashi (cf. ici) opère une disjonction en deux cas selon qu'un angle est aigu ou obtus.

- Dans la recherche de l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$, les démonstrations 1 et 2 (cf. ici) distinguent trois cas : $\mathrm{M} = \mathrm{A}$, $\mathrm{M} = \mathrm{B}$, autres cas.

- Pour $x \neq 0$ et $n \in$ Z, la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto n\, x^{n-1}$. On distingue les cas $n \geq 1$, $n = 0$ et $n < 0$.

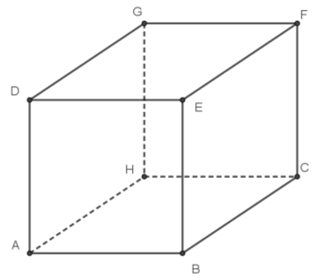
Exercices possibles en classe de première

- Démontrer que si un entier n est somme de deux carrés, alors son reste dans la division euclidienne par 4 est différent de 3. On raisonne selon les parités possibles des deux nombres : pair et pair, pair et impair, impair et impair.

- Lien entre vitesse et dérivée en cinématique : si $t \mapsto d(t)$ modélise la distance parcourue en fonction du temps par un point mobile sur sa trajectoire, la valeur en h du taux d'accroissement en t_0, autrement dit le nombre $\frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$, modélise sa vitesse moyenne entre deux instants t_0 et $t_0 + h$. Pour l'établir, on distingue les cas $h > 0$ et $h < 0$.

- En probabilités, les problèmes de marches aléatoires peuvent donner lieu à une disjonction de cas.

Exemple : une particule part du sommet A d'un cube et effectue trois déplacements successifs, chacun l'amenant sur un sommet voisin relié par une arête.



Démontrer que la particule se retrouve sur l'un des sommets B, F, D ou H.

- Dans un triangle ABC, avec $\mathrm{b} = \mathrm{CA}$ et $\mathrm{c} = \mathrm{AB}$, démontrer la formule de l'aire : $\mathrm{S} = \frac{1}{2}\mathrm{bc}\sin\widehat{\mathrm{A}}$.
- On démontre séparément la formule dans les cas où l'angle $\widehat{\mathrm{A}}$ est droit, aigu, obtus.
- Dés non transitifs[10]

  Quatre dés A, B, C, D ont leurs six faces marquées de la façon suivante :

  dé A : $0, 0, 4, 4, 4, 4$;
  dé B : $3, 3, 3, 3, 3, 3$;
  dé C : $2, 2, 2, 2, 6, 6$;
  dé D : $1, 1, 1, 5, 5, 5$.

  Deux personnes, X et Y, jouent au jeu suivant : X choisit un dé et le lance ; Y choisit alors l'un des trois dés restants et le lance à son tour. Le gagnant est celui qui obtient le plus grand numéro.

  Montrer que, en jouant bien, Y a deux chances sur trois de gagner.

  On examine les quatre choix possibles de dé par le joueur X.

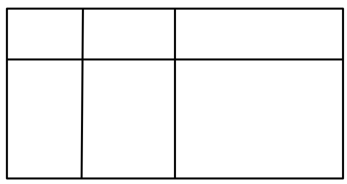
Variante du principe, dégagée par le professeur

Cette variante est utilisée, non pas pour démontrer une propriété, mais pour résoudre un problème relatif à un ensemble E d'objets (nombres, points, droites…). On simplifie le problème en le résolvant sur des sous-ensembles E_1, E_2… disjoints deux à deux, dont la réunion est égale à E. À la fin, on rassemble les résultats pour conclure sur le problème dans E.

Dans ce cas, on n'évoque pas un raisonnement par disjonction de cas, mais une résolution par disjonction de cas.

- Les problèmes de dénombrement se résolvent parfois plus aisément par ce principe.

Exemple : « Combien de rectangles ont leurs quatre côtés matérialisés dans la figure ci-contre ? ».



On peut dénombrer séparément les rectangles ayant pour côtés horizontaux : a) les deux segments du haut : b) celui du haut et celui du bas ; c) les deux segments du bas.

[10] Le résultat paradoxal de cet exercice a été mis en évidence par le statisticien américain contemporain Bradley Efron, né en 1938, qui a reçu de nombreux prix internationaux pour avoir créé les méthodes de *Bootstrap*. Ces méthodes très actuelles améliorent la prévision statistique grâce à la puissance de calcul des ordinateurs.

- Certains problèmes d'arithmétique se traitent aussi à travers plusieurs cas plus simples.
  L'exemple qui suit concerne une équation diophantienne et peut être donné en première :
  « Trouver tous les triplets d'entiers naturels a, b, c dont la somme des inverses est égale à 1 ».

On note a, b, c les entiers cherchés, avec $1 \leq a \leq b \leq c$. La condition $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ implique $1 \leq \frac{3}{a}$, donc $1 \leq a \leq 3$. On poursuit par disjonction des trois cas $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$. Les deux derniers cas donnent une condition analogue sur b qui permet à nouveau de disjoindre les différents cas sur b.

- Un problème classique de trigonométrie : « À quelles heures les deux aiguilles d'une horloge sont-elles alignées ? », après modélisation en termes d'angles de vecteurs, peut se résoudre en distinguant les deux sens possibles de l'alignement.

- Déterminer l'intersection d'une parabole d'équation $y = a\,x^2 + b\,x + c$ avec une droite parallèle à un axe (approfondissement proposé dans le programme).
  On distingue les cas : a) avec l'axe des abscisses ; b) avec l'axe des ordonnées.

Raisonnement par l'absurde

Principe, dégagé par le professeur

Pour démontrer une proposition *P*, on suppose que sa négation (non *P*) est vraie, on en déduit des conséquences qui aboutissent à une contradiction. Cela montre que (non *P*) ne peut pas être vraie, et par conséquent que *P* est vraie.

Rédaction

S'il s'agit de démontrer *P*, la rédaction peut commencer par : « Montrons que *P*. Procédons par l'absurde et supposons que *P* est fausse » ou : « Montrons par l'absurde la proposition *P*. Supposons (non *P*) . » On doit alors établir les conséquences. Une fois la contradiction obtenue, on la met en évidence et on en conclut que *P* ne peut pas être fausse, donc que *P* est vraie.

Exemples de démonstrations de notions du programme de première

- Démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique, ou n'est pas géométrique. Si l'on suppose que la suite l'est, le fait d'exhiber un contre-exemple est contradictoire. Cela constitue donc une forme de raisonnement par l'absurde.

- La fonction « racine carrée » n'est pas dérivable en 0.

On suppose qu'elle l'est. Le taux d'accroissement en zéro est égal à $\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$, et doit avoir une limite finie lorsque h tend vers 0, avec $h > 0$. Cela implique que ce taux est borné pour h voisin de zéro : le professeur peut admettre ce résultat ou le prouver en amont. On peut établir une contradiction, soit en remarquant intuitivement $\frac{1}{\sqrt{h}}$ est aussi grand que l'on veut lorsque h tend vers 0, avec $h > 0$, soit en l'établissant de façon plus rigoureuse :

Soit $M > 0$ fixé quelconque ; dès que $0 < h < \frac{1}{M^2}$, on a $M < \frac{1}{\sqrt{h}}$. D'où la contradiction.

Cela permet d'introduire ici le fait que $\frac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$ en 0, ce qui sera étudié en terminale.

Exercices possibles en première

Lorsqu'on veut prouver qu'une assertion introduite par un quantificateur universel est fausse, il suffit d'exhiber un contre-exemple. Cette démarche, qui se retrouve dans un bon nombre de problèmes, peut être présentée comme un raisonnement par l'absurde : si la propriété était vraie, elle le serait pour tout élément, donc le fait d'exhiber un contre-exemple constitue une contradiction. Dans la suite, on envisage d'autres types d'exercices.

- Démontrer que 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$.

- Démontrer que, pour tout réel x, si $x^2 = 0$, alors $x = 0$.

- Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

- On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On considère dans un repère orthonormal la droite D d'équation $y = \sqrt{2}\,x$. Déterminer tous les points à coordonnées entières situés sur le droite D.

- Soit P une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2. On suppose qu'il existe trois réels deux à deux distincts a, b, c tels que $P(a) = P(b) = P(c) = 0$. Démontrer que P est la fonction nulle.

- Soit x et y deux réels tels que $x \neq y$ et $xy \neq 1$. Démontrer que $\frac{x}{1+x^2} \neq \frac{y}{1+y^2}$.

Raisonnement par contraposée

Principe, dégagé par le professeur

Pour démontrer une implication du type $P \Rightarrow Q$, on démontre que (non Q) $\Rightarrow$ (non P). Le professeur peut dégager le fait que la contraposée est équivalente à l'implication initiale ; elle a donc les mêmes « valeurs de vérité » que l'implication initiale : si l'une est vraie, l'autre l'est ; si l'une est fausse, l'autre est fausse également.

Rédaction

Le résultat à démontrer doit être sous une forme d'implication. La démonstration peut commencer par : « Montrons par contraposition $P \Rightarrow Q$. Pour cela supposons (non Q) et démontrons (non P). »

Exercices possibles en première

Dans les exercices qui suivent, le professeur explicite au début les propositions P et Q. Après une ou deux études, il peut laisser davantage d'initiative à certains élèves.

- Soit n un entier naturel quelconque. Démontrer que si n^2 est pair, alors n est pair.
- Montrer que si le produit de deux entiers est impair, alors ces deux entiers sont impairs.
- Soit x un nombre réel. Démontrer que si $x^3 < 8$ alors $x < 2$.
- L'exercice suivant permet de faire travailler aux élèves l'effet sur les quantificateurs de la négation d'une proposition :
- « Soit a et b deux réels. Montrer que, si pour tout entier n, $a < b + \frac{1}{n}$, alors $a \leq b$. »
- Soit A et B deux événements d'un modèle probabiliste. Montrer que si $A \cup B = A \cap B$, alors $A = B$.

Absurde ou contraposée?

Les deux types de raisonnement ont pour point commun de s'appuyer sur la négation de propositions, mais se distinguent nettement par ailleurs.

- Dans un raisonnement par l'absurde, la proposition à démontrer est de forme non précisée. On suppose sa négation et on cherche une contradiction.
- Dans un raisonnement par contraposition, la proposition à démontrer est mise sous forme d'une implication. Pour la démontrer, on la remplace par sa contraposée.

Pour démontrer une implication $P \Rightarrow Q$, les deux types de raisonnement peuvent parfois être envisagés.

- Par l'absurde : on suppose P et (non Q) et on cherche une contradiction.
- Par contraposition : on suppose (non Q) et on cherche à démontrer (non P).

Il s'agit alors davantage d'une différence de présentation que d'une différence de fond. Certains élèves peuvent avoir une préférence pour le raisonnement par l'absurde, qu'ils ont rencontré dans les classes antérieures. Il est cependant important de leur faire pratiquer le raisonnement par contraposition quand il conduit à une rédaction plus économique.