EXPLOITATION PÉDAGOGIQUE DU TEST DE POSITIONNEMENT EN MATHÉMATIQUES À L'ENTRÉE EN SECONDE PROFESSIONNELLE

Ce document explicite une méthodologie possible pour réaliser une analyse didactique des items du test de positionnement en mathématiques à l'entrée en seconde professionnelle que la DEPP a libérés. Cette analyse, est mise en œuvre pour quatre d'entre eux afin de permettre une exploitation pédagogique de ce test de positionnement.

Plus précisément, cette analyse vise à aider les enseignants, à partir d'une photographie générale de l'état des acquisitions mathématiques de leurs élèves (sur la base de connaissances et de compétences du programme du cycle 4), à identifier les origines possibles des erreurs commises et à introduire des éléments de différenciation et de personnalisation dans leur enseignement en classe de seconde professionnelle, et en particulier lors de la consolidation des acquis et de l'accompagnement personnalisé.

1. Le test

Le test ne renseigne que sur des acquisitions susceptibles d'être évaluées collectivement sur ordinateur, dans quatre domaines thématiques en lien avec le programme du cycle 4 : nombres et calcul, organisation et gestion des données, géométrie du calcul et résolution algébrique de problèmes. Les deux premiers domaines cités sont communs avec ceux évalués dans le test de positionnement à l'entrée en seconde de la voie générale et technologique. Les quatre domaines sont divisés en sous-domaines eux-mêmes déclinés en types de tâches.

Le test comporte des questions flash et des tâches intermédiaires. Une question flash relève d'une activité mentale attendue sur une durée courte (environ 20 secondes) et une tâche intermédiaire relève d'une activité attendue sur une durée plus longue (1 à 2 minutes).

L'analyse des items libérés par la DEPP ne permet pas d'avoir une vision exhaustive de ce qui a été posé aux élèves, d'autant que tous n'ont pas été évalués sur les mêmes exercices. En effet, le test est construit selon une modalité adaptative : il est organisé en deux séries d'exercices, une première série (starter) donnant lieu à un calcul automatique de score oriente vers une seconde série d'exercices (de niveau haut ou de niveau bas) en fonction du niveau de maîtrise de l'élève.

Les items ont été testés sur un échantillon représentatif d'élèves de manière à mesurer leur niveau de difficulté et à construire, par domaine évalué, une échelle qui caractérise les acquis de quatre grands groupes d'élèves, selon leur niveau de maîtrise (niveau de maîtrise insuffisante, niveau de maîtrise fragile, niveau de maîtrise satisfaisante (décliné selon trois paliers), très bon niveau de maîtrise).

Les items qualifiés de niveau « maîtrise insuffisante » sont les seuls réussis par les élèves du niveau « maîtrise insuffisante ». Ils sont également réussis par tous les élèves des niveaux de maîtrise supérieurs. En revanche, seuls les élèves du niveau « très bonne maîtrise » réussissent les items du niveau

« très bonne maîtrise ». Les élèves des niveaux de maîtrise inférieurs échouent à ces items.

Chaque item dispose de trois attributs : un niveau de maîtrise, un domaine et une des quatre compétences : s'approprier, analyser-raisonner, réaliser et valider (le mode d'évaluation nécessitant une correction automatique et des réponses fermées, ne permet pas de rendre compte de la compétence communiquer).

L'analyse des items libérés décrit une méthode permettant à la fois d'analyser des situations d'évaluation de ce type et de concevoir des remédiations et une différenciation adaptées.

2. Une photographie de l'état des acquisitions de chaque élève

La restitution de la passation comporte deux volets :

- un premier volet qui renseigne sur le niveau de maîtrise de l'élève dans chacun des quatre domaines thématiques évalués ;
- un second volet qui renseigne sur le niveau d'acquisition dans chacune des quatre compétences testées.

3. Méthodologie employée pour l'analyse didactique d'un item

Elle consiste en une présentation de l'item tel que libéré par la DEPP, suivie de commentaires pédagogiques comportant :

- une analyse des difficultés de cet item : pourquoi correspond-il au niveau de maîtrise indiqué (insuffisante, fragile, satisfaisante (palier 1, 2 ou 3) ou très bonne maîtrise) ? ;
- une analyse des distracteurs ;
- des pistes de différenciation pédagogique ;
- des pistes de remédiation ;
- des prolongements possibles (lorsque l'item s'y prête) ;
- des éléments du programme de seconde professionnelle permettant de remobiliser les principales notions et compétences mises en jeu dans l'item ;
- des liens sur des ressources pédagogiques liées à l'item.

4. Analyse de quelques items

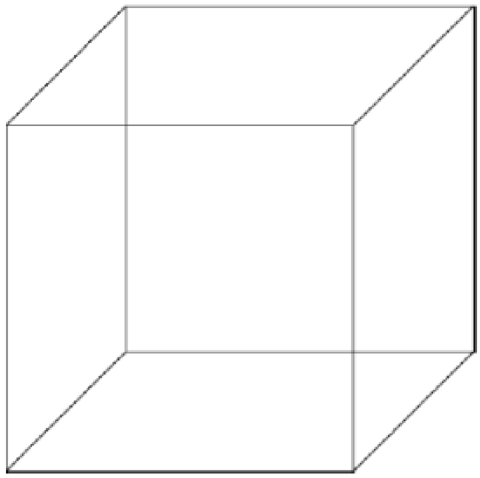
Domaines / Compétences	Organisation et gestion de données	Nombres et calculs	Géométrie du calcul	Résolution algébrique de problèmes
S'approprier			x	
Analyser / Raisonner				x
Réaliser	x			
Valider		x		

Les quatre items analysés portent sur des domaines différents et chacun nécessite principalement la mise en œuvre d'une compétence différente.

Voie : Pro	**Source du document :** MEN-SG-DEPP
Domaine : Géométrie du calcul	**Compétence :** S'approprier
Sous domaine : Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées	

Item 25

Un cube d'arête 5 cm est réalisé en fil de fer.



Combien de fil de fer faut-il pour le réaliser ?

- ○ 5 cm de fil de fer
- ○ 30 cm de fil de fer
- ○ 40 cm de fil de fer
- ○ 45 cm de fil de fer
- ○ 60 cm de fil de fer

Réponse attendue :	60 cm de fil de fer
Descriptif de la tâche :	Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables.
Positionnement :	Fragile

Commentaires pédagogiques

Analyse des difficultés

Pourquoi l'item correspond-il à un niveau de maîtrise « fragile » ?

- Les arêtes sont visibles sur la représentation mais leur comptage peut poser problème à certains élèves (codage ou surlignage impossible sur écran).
- Le calcul à effectuer n'est pas aussi simple que si l'arête du cube était 10 cm.

1) Quelles sont les difficultés susceptibles de mettre un élève en échec ?

- Une difficulté à interpréter une représentation d'un solide.
- La méconnaissance du terme « arête ».
- Une mauvaise compréhension du terme « Réaliser ».

Analyse des distracteurs

- 5 cm : l'élève donne comme réponse la seule valeur numérique fournie dans l'énoncé.
- 30 cm : l'élève a multiplié la longueur de l'arête par le nombre de faces.
- 40 cm : l'élève a multiplié la longueur de l'arête par le nombre de sommets (ou a seulement pris en compte les arêtes des faces supérieure et inférieure).
- 45 cm : l'élève a agi comme si seules 9 arêtes étaient entièrement visibles.

Pistes de différenciation pédagogique

2) Simplification (transformation de l'item vers un niveau de maîtrise « insuffisant »)

- En gardant un cube : nommer les sommets du cube A, B, C, D, E, F, G, H et donner par exemple AB = 10 cm.
- En changeant de solide : remplacer le cube en une pyramide d'arête 10 cm (voir item libéré par la DEPP en 2018).

3) Complexification (transformation de l'item vers un niveau « satisfaisant palier 1 »)

- Noter a la longueur de l'arête du cube et demander l'expression, en fonction de a, de la longueur totale L de fil de fer nécessaire à la réalisation du cube.
- Proposer de choisir parmi plusieurs expressions de L.

Remédiations

- Manipuler un cube et dénombrer ses sommets, ses arêtes et ses faces.
- Dans un premier temps faire compter les arêtes d'une face et calculer la longueur de fil pour réaliser une face ; dénombrer le nombre d'arêtes du cube puis répondre à la question.
- Utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour représenter le cube, colorier ses arêtes et le faire « tourner dans l'espace ».
- Formaliser, par écrit ou par oral, la démarche de résolution.
- Nommer chacun des sommets du cube, nommer les arêtes puis les compter.

Éléments du programme de seconde professionnelle permettant de remobiliser les solides usuels et le calcul avec des grandeurs mesurables

Les connaissances sur les solides de l'espace déjà étudiés au collège sont réinvesties dans le domaine Géométrie qui permet, notamment, de travailler la vision dans l'espace.

Ressources

- Attendus de fin de 3e en mathématiques.
- Document ressource : Représenter l'espace.

Voie : Pro

Domaine : Organisation et gestion de données

Sous domaine : Résoudre des problèmes de proportionnalité

Source du document : MEN-SG-DEPP

Compétence : Réaliser

Item 5

Sur une autoroute, un automobiliste roule à la vitesse constante de 100 km/h.

Le temps mis par cet automobiliste pour parcourir 150 km est égal à...

- ○ 1 h 30 min
- ○ 1 h 50 min
- ○ 150 min

Réponse attendue :	1 h 30 min
Descriptif de la tâche :	Résoudre des problèmes utilisant la proportionnalité. Effectuer des calculs sur les durées. Option 2 : l'élève identifie la moitié d'une heure à 50 minutes. Option 3 : l'élève réutilise directement une donnée de l'énoncé (150 km).
Positionnement :	Satisfaisant Palier 1

Commentaires pédagogiques

Analyse des difficultés

Pourquoi l'item correspond-il à un niveau de maîtrise satisfaisante palier 1 ?

L'item repose sur la proportionnalité entre la distance parcourue à vitesse constante et la durée du parcours. Cette notion est travaillée depuis le cycle 3 en mathématiques et au cycle 4 en physique. Au regard des données proposées (150 km, 100 km/h), la réussite de l'item ne présuppose pas la formalisation d'une situation de proportionnalité.

L'item fait également appel à la conversion immédiate d'une demi-heure en minutes.

La décomposition additive 150 km = 100 km + 50 km et l'expression de 50 comme moitié de 100, associées à l'automatisation de procédures liées à la proportionnalité permettent de conclure de manière presque directe.

Analyse des distracteurs

- L'option 2 traduit la confusion entre 1,5 h et 1 h 50 min.
- L'option 3 peut traduire la réutilisation directe d'une donnée de l'énoncé ou l'assimilation plus ou moins consciente entre h et min, alliée au raisonnement « km sont parcourus en 100 min, donc 150 km le sont en 150 min ».

Pistes de différenciation pédagogique

Simplifications possibles de l'item pour en faire un item correspondant au niveau de maîtrise fragile

- Demander la durée d'un parcours de km, puis de km, 25 km, pour travailler sur le double, la moitié, le quart.
- On peut également modifier le texte de l'énoncé en « Sur une autoroute, un automobiliste roule à une vitesse constante de kilomètres par heure » pour revenir au sens de la grandeur composée vitesse.

Complexifications possibles de l'item

1) **Pour en faire un item correspondant au niveau de maîtrise satisfaisante palier 2**
   - On peut proposer une vitesse de 120 km/h (qui peut aussi s'écrire sous la forme 120 km h^{-1}) et demander la durée d'un parcours de 150 km.
   - Deux méthodes de résolution peuvent être envisagées :
     - la décomposition additive 150 km=120 km+30 km puis reconnaître comme étant le quart de 120
     - la relation multiplicative $150 = \frac{5}{4}\times 120$. La durée d'un parcours de 150 km s'obtient donc en multipliant par $\frac{5}{4}$ celle d'un parcours de 120 km.

2) **Pour en faire un item correspondant à un niveau de très bonne maîtrise**
   a) La complexification peut se faire en choisissant une distance dont le rapport à la vitesse n'est pas immédiat.
   Exemple : pour une vitesse constante de 100 km/h, en combien de temps parcourt-on 130 km ? Puisque $130\ \mathrm{km}\ = 1{,}3\times 100\ \mathrm{km}$, la durée d'un trajet de 130 km est égale à 1,3 h.
   b) La complexification peut se faire au niveau de la conversion des durées du système décimal au système sexagésimal.
   c) Enfin, la complexification peut se faire en quittant le cadre « distance-temps-vitesse » pour étudier d'autres problèmes de proportionnalité.
   Exemple : un automobiliste roule à la vitesse constante de 70 km/h. Il augmente sa vitesse de 5%. Quelle est la nouvelle valeur de sa vitesse ?

Remédiations

1) On peut amener les élèves à effectuer des décompositions additives ($150 = 100 + 50$) ou multiplicatives ($150 = 1{,}5\times 100$) pour traiter des problèmes de proportionnalité, en lien avec les propriétés d'additivité et d'homogénéité de la fonction linéaire sous-jacente.

2) Favoriser les pratiques manipulatoires (bandes de papier pour les décompositions additives, horloges à aiguilles pour les conversions horaires) et les schémas.

3) En s'appuyant sur des exemples significatifs, faire comprendre que la proportionnalité entre la durée du parcours et la distance parcourue repose sur la constance de la vitesse et que cette vitesse constante est justement le coefficient de proportionnalité entre les deux grandeurs.

4) Pratiquer régulièrement (entraînement technique dans la durée, sous forme de questions orales ou d'exerciseurs) des conversions de durée.

5) Verbaliser systématiquement les problèmes de proportionnalité pour créer des automatismes (additivité, homogénéité, retour à l'unité).

6) En cas d'utilisation de tableaux de proportionnalité (qu'il ne faut ni diaboliser ni considérer comme un outil miracle), veiller à faire figurer le nom des grandeurs mises en jeu et à associer les techniques de calcul (propriété d'homogénéité ou utilisation du coefficient de proportionnalité) à la verbalisation des processus.

× 1,3

Distance (en km)	100	130
Durée (en h)	1	?

÷ 100

Distance (en km)	100	130
Durée (en h)	1	?

Éléments du programme de seconde professionnelle permettant de remobiliser la proportionnalité

La proportionnalité intervient dans de nombreux modules du programme ; citons par exemple :

- Domaine Algèbre-Analyse, module Fonctions
  - Reconnaître une situation de proportionnalité et déterminer la fonction linéaire qui la modélise.
- Domaine statistique et probabilités, module statistique à une variable
  - Extraire des informations d'une représentation d'une série statistique

La proportionnalité est également utilisée dans plusieurs domaines du programme de physique-chimie ; citons par exemple :

- Domaine Chimie
  - Préparer une solution de concentration massique donnée, par dissolution.
- Domaine Électricité
  - Connaître la relation entre U et I pour des systèmes à comportement de type ohmique.
- Domaine Mécanique
  - Utiliser la relation entre vitesse moyenne, distance parcourue et durée.

Ressources

- Document ressource cycle 4 sur la proportionnalité.
- Attendus de fin de 3e en mathématiques.
- Document ressource sur les automatismes.

Voie : Pro	**Source du document :** MEN-SG-DEPP
Domaine : Nombres et calculs	**Compétence :** Valider
Sous domaine : Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes	

Item 16

Cocher soit Vrai, soit Faux pour l'affirmation suivante :

$\frac{23}{53} = \frac{2}{5}$ **en raison de la simplification par 3.**

- ○ Vrai
- ○ Faux

Réponse attendue :	Faux
Descriptif de la tâche :	Comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels en écriture fractionnaire: comparer deux fractions en convoquant la propriété de simplification d'une fraction (ou la non « simplification par le chiffre des unités »).
Positionnement :	Fragile

Commentaires pédagogiques

Analyse des difficultés

Pourquoi l'item correspond-il à un niveau de maîtrise fragile ?

L'item repose sur une erreur classique dans la simplification d'une fraction : la suppression du chiffre des unités. Ce type erreur est induit par l'association, dans l'esprit des élèves, de la simplification par un facteur commun à l'action de barrer ce nombre dans l'écriture fractionnaire. Cette action, correcte dans la simplification par 10, ($\frac{20}{50} = \frac{2\cancel{0}}{5\cancel{0}} = \frac{2}{5}$) a pu être automatisée par les élèves comme étant un procédé général de simplification.

L'habitude qui consiste à barrer un facteur commun au numérateur et au dénominateur d'une fraction ($\frac{6}{15} = \frac{2\times\cancel{3}}{5\times\cancel{3}} = \frac{2}{5}$)peut également renforcer l'assimilation entre le fait de barrer un chiffre et celui de simplifier une fraction.

Analyse des distracteurs

Le fait que l'item ne propose que deux réponses accroît le poids des réponses fournies au hasard.

Pistes de différenciation pédagogique

Complexifications possibles de l'item

1) **Pour en faire un item correspondant au niveau de maîtrise satisfaisant palier 1**

   La complexification peut se faire en modifiant la formulation de l'item.

   Exemple : on cherche à simplifier la fraction $\frac{23}{53}$. Indiquer si chacune des trois affirmations ci-dessous, est juste ou est fausse :

   - c'est possible de simplifier la fraction en barrant les 3 ; on obtient $\frac{2}{5}$;
   - ce n'est pas possible car 53 et 23 n'ont pas de facteur commun ;
   - c'est possible de simplifier cette fraction par 3. En effet, les nombres 53 et 23 sont divisibles 3 par puisque leur chiffre des unités est égal à 3.

2) **Pour en faire un item correspondant à un très bon niveau de maîtrise**

   La complexification peut à nouveau se faire en modifiant la formulation de l'item afin de solliciter davantage la compétence « raisonner ».

   Exemple : parmi les affirmations suivantes, identifier celle(s) qui est (sont) correcte(s).

   L'égalité $\frac{23}{53} = \frac{2}{5}$ est fausse car :

   - les produits 23×5 et 53×2 n'ont pas le même chiffre des unités ;
   - $23 \neq 2$ et $53 \neq 5$;
   - 53 et 23 n'ont pas de diviseur commun.

Remédiations

Plusieurs axes de remédiation sont possibles :

- Revenir sur simplifications de fractions ;
- Retravailler la notion de fraction en lien avec celle de quotient :
  $\frac{23}{53}$ est le nombre qui, multiplié par 53 donne 23. Or, quand on multiplie $\frac{2}{5}$ par 53 on obtient $\frac{106}{5}$ qui n'est pas égal à 23 (ce n'est pas un entier car 106 n'est pas divisible par 5).
- Pratiquer régulièrement (entraînement technique sous forme de questions flash) la comparaison (égalité, ordre) de deux fractions.

Éléments du programme de seconde professionnelle permettant de remobiliser la notion d'égalité ou la simplification de fractions

Ces notions font partie de la liste d'automatismes à travailler.

Elles peuvent l'être également dans le domaine Statistique - Probabilités, module Fluctuation d'une fréquence selon les échantillons, lorsque les probabilités sont exprimées sous forme fractionnaire et plus généralement, chaque fois que les problèmes étudiés comportent des nombres en écriture fractionnaire.

Ressources

- Document ressource Du numérique au littéral.
- Document ressource Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les fractions.
- Document ressource sur les automatismes.

Voie : Pro
Domaine : Résolution algébrique de problèmes
Sous domaine : Mettre un problème en équation en vue de sa résolution
Source du document : MEN-SG-DEPP
Compétence : Analyser/Raisonner

Item 36

Deux frères âgés de 14 et 17 ans doivent se partager la somme de 150 euros. Ils décident ensemble que le plus âgé aura 50 euros de plus que son frère.

Pour déterminer le montant que chacun recevra, le plus âgé choisit de poser le problème avec une équation.

Il décide de poser comme inconnue x la quantité d'argent qu'aura son petit frère.

Avec les étiquettes proposées, compléter l'équation qui lui permettra de résoudre ce problème :

50 150 14 2 17 $=$ $+$

$\times x$

Réponse attendue :	2 × x + 50 = 150
Descriptif de la tâche :	Mettre en équation une situation de vie réelle en faisant passer la situation de deux à une inconnue.
Positionnement :	Satisfaisant Palier 3

Commentaires pédagogiques

Analyse des difficultés

Pourquoi l'item correspond-il à un niveau de maîtrise « satisfaisant Palier 3 » ?

L'item porte sur la mise en équation d'un problème du premier degré. On sait que le passage à l'algèbre avec recours à une lettre est une difficulté pour les élèves de niveau fragile. On note cependant que, dans cet item, la modélisation n'est pas à la charge de l'élève puisque l'énoncé impose le choix de x. De plus, il n'est pas demandé de résoudre l'équation trouvée.

1) **Quelles sont les difficultés susceptibles de mettre un élève en échec ?**

- Les « étiquettes » sont agencées selon un attendu spécifique de l'expression réduite, avec la présence assez inhabituelle de l'opérateur ×x. Or cette formulation ne correspond pas aux premières étapes de la mise en équation : quantité d'argent revenant au petit frère, quantité d'argent revenant au grand, somme des deux, etc. Un élève n'ayant pas automatisé les rudiments de calcul algébrique peut avoir compris qu'il s'agit de $x + (x + 50)$, mais ne pas savoir réduire cette expression en utilisant l'étiquette ×x.
Notons également que la juxtaposition du signe multiplié (×) et de la lettre x peut avoir dérouté certains élèves.
- La présence dans l'énoncé de données inutiles est également un facteur de déstabilisation d'élèves de niveau fragile.
- L'ordre d'apparition des données ne correspond pas à l'ordre de traitement lors de la résolution du problème.

Pistes de différenciation pédagogique

1) Simplification (transformation de l'item vers un niveau de maîtrise « fragile »)

- Ne pas préciser les âges des frères (données inutiles).
- Demander d'exprimer en fonction de x le montant revenant au frère aîné.
- Proposer de choisir parmi plusieurs expressions.

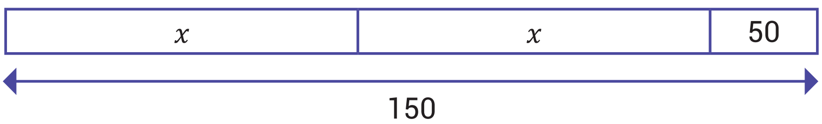
2) Complexification (transformation de l'item vers un niveau « très bon niveau de maîtrise »)

- Laisser à l'élève l'initiative du choix de l'inconnue.
- Changer les données numériques 50 et 150 pour motiver le recours à l'algèbre, alors qu'un calcul numérique direct (150 - 50 à partager en deux parties égales) ou quelques tâtonnements permettent ici de résoudre le problème sans recourir à sa mise en équation.
- Proposer de partager les 150 euros au prorata de l'âge des deux frères.

Remédiations

La visualisation de certains problèmes algébriques simples par des représentations graphiques peut aider au passage à l'abstraction.

Ainsi, la représentation de problèmes additifs sous forme de bandes de papier peut être une étape intermédiaire à l'abstraction. Dans le cas présent, elle donnerait :

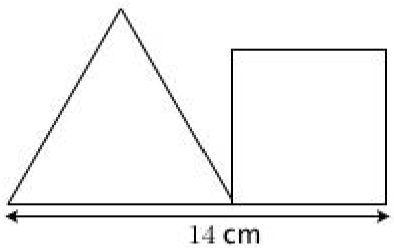


Prolongements

- Modéliser un problème se ramenant à une équation du type $ax + b = cx + d$ et le résoudre.
- Mettre en équation des problèmes impliquant des grandeurs géométriques (périmètre, aire).

Exemple 1

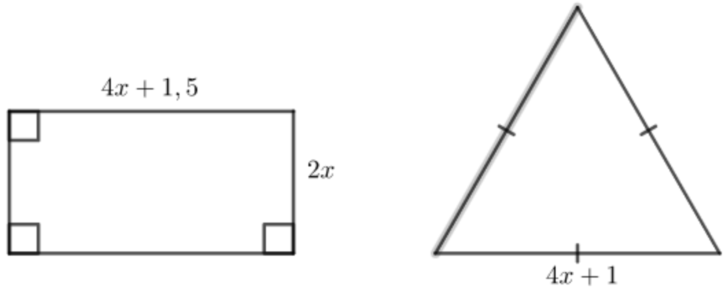
On juxtapose un triangle équilatéral et un carré comme schématisé ci-dessous.



Est-il possible que le triangle et le carré aient le même périmètre ?

Exemple 2 (extrait du DNB Pondichéry 2019)

On considère sur les deux figures ci-dessous, un triangle équilatéral et un rectangle, où x représente un nombre positif quelconque et où les longueurs sont exprimées en centimètre.



1) Construire le triangle équilatéral pour x = 2

2) Pour quelle valeur de x le périmètre du rectangle est-il égal à 18 cm ?

3) Les deux figures ont-elles le même périmètre pour toute valeur de x ?

Éléments du programme de seconde professionnelle permettant de remobiliser la mise en équation d'un problème

Le domaine Algèbre-analyse comporte un module intitulé Résolution d'un problème du premier degré, qui permet particulièrement de travailler la mise équation d'un problème en vue de sa résolution. L'une des capacités développées est :

- Traduire un problème par une équation ou une inéquation du premier degré à une inconnue.

Ressources

- Repères annuels de progression en mathématiques : cycle 4.
- Document ressource cycle 4 sur la proportionnalité.
- Attendus de fin de 3e en mathématiques.
- Document-ressource : Utiliser le calcul littéral.