Grandeurs et mesures

- Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées.
- Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques.

Objectifs

Le thème « grandeurs et mesures » figure au programme de mathématiques dès le cycle 2 et s'enrichit progressivement tout au long de la scolarité obligatoire. Aussi, la maitrise des connaissances et compétences sur ce thème doit s'appuyer sur une fréquentation régulière des notions abordées, ce qu'il est possible de faire en lien avec de nombreuses parties du programme.

Le travail sur les grandeurs et les mesures relève principalement de la résolution de problèmes, dans des situations empruntées à la vie courante ou issues d'autres disciplines ou encore dans d'autres thèmes du programme de mathématiques. Il permet de réinvestir des connaissances acquises en mathématiques mais aussi d'en introduire de nouvelles. Il permet également de mobiliser des valeurs approchées et d'aborder les notions d'ordre de grandeur et de chiffres significatifs, dans des contextes réalistes. De nombreux domaines des mathématiques sont concernés : géométrie, statistiques, proportionnalité, fonctions, calcul numérique et littéral.

Un travail spécifique sur certaines grandeurs, comme les longueurs, les aires ou les volumes, est nécessaire pour mettre en valeur les concepts sous-jacents et donner sens aux formules qui permettent d'en calculer des mesures. Il est important pour le professeur de distinguer les notions de grandeur et de mesure et de faire vivre les deux aspects auprès des élèves sans formalisme excessif.

Le traitement de situations concrètes pourrait faire penser que l'enseignement des grandeurs et des mesures est aisé mais les résultats des évaluations réalisées par la DEPP montrent qu'il en n'est rien. Ces difficultés ne sont en général pas de l'ordre de l'erreur de formule ou d'unité mais bien d'une difficulté de compréhension du concept initial.

Liens avec les domaines du socle

La résolution de problèmes portant sur les notions de grandeurs et mesures est fortement liée au domaine « les langages pour penser et communiquer » (domaine 1) : usage d'un vocabulaire mathématique adapté (périmètre, aire, vitesse, unités…), compréhension des énoncés des problèmes, expression des solutions.

Les notions de grandeurs et mesures sont fréquemment sollicitées dans la résolution de problèmes qui constitue un objectif du domaine « les méthodes et outils pour apprendre » (domaine 2).

Les calculs impliquant des grandeurs mesurables s'insèrent naturellement dans l'étude des systèmes naturels et techniques (domaine 4).

Des repères historiques sur les grandes étapes des découvertes scientifiques permettent également de relier l'étude des grandeurs et mesures au domaine « les représentations du monde et l'activité humaine », par exemple pour le calcul du rayon de la Terre ou la définition du système métrique (domaine 5).

Progressivité des apprentissages

Fin de cycle 2 (CE2)

Au cycle 2 l'élève travaille sur les grandeurs suivantes : taille des collections, longueur, masse, capacité, durée, prix. Il s'agit d'associer différentes grandeurs à un même objet : sa longueur, sa masse, sa capacité… Mesurer, estimer et utiliser les différentes unités permet de faire déjà le lien avec les nombres et les problèmes arithmétiques très simples.

Fin de cycle 3 (6e)

Au cycle 3 s'ajoutent les notions d'aire, de volume et d'angle. L'utilisation des nombres et des opérations arithmétiques permet de résoudre des problèmes impliquant des grandeurs mesurables (géométriques, physiques, économiques).

Fin de cycle 4 (3e)

Au cycle 4 les nouveautés essentielles portent sur les notions de grandeur produit ou quotient et l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires ou les volumes.

Néanmoins, le travail sur les grandeurs vues au cycle 3 doit être poursuivi au travers de la résolution de problèmes en lien avec la plupart des thèmes au programme. C'est cette fréquentation régulière des grandeurs, des mesures, des unités qui assurera que le concept reste vivant et que les techniques élémentaires sont maîtrisées de manière pérenne

Stratégies d'enseignement

Le thème « grandeurs et mesures » n'a pas vocation à être travaillé seul mais au service de la résolution de problèmes. Il permet d'aborder une diversité de situations qui relèvent d'autres parties du programme : calcul numérique, calcul littéral, équations, fonctions, géométrie. L'attendu de fin de cycle « mobiliser la proportionnalité pour résoudre un problème » y est fortement travaillé.

Savoir-faire travaillés

- Manipuler et interpréter des grandeurs.
- Comparer des grandeurs.
- Mesurer.
- Référer à des formules et calculer.
- Référer à des unités et effectuer des changements d'unités.

Utilisation des unités dans les calculs

L'utilisation des unités dans les égalités et les calculs est légitime. Elle permet un contrôle de l'unité finale (évitant par exemple des confusions entre périmètre et aire ou des erreurs de formules dans le cadre des vitesses) ; elle peut aussi être une aide dans les changements d'unités. Un lien peut aussi être effectué entre les unités et les formules (par exemple entre l'unité km/h et la formule v=d/t) ou entre l'utilisation des unités dans les calculs et le calcul littéral (*cf. infra* pour le calcul d'aire). On privilégiera les écritures du type P = 2 × (3 cm + 5 cm) = 2 × 8 cm = 16 cm pour le calcul de la mesure d'un périmètre et $A = \frac{4\text{ cm} \times 6\text{ cm}}{2} = \frac{24\text{ cm}^2}{2} = 12\text{ cm}^2$ pour le calcul de la mesure d'une aire.

Conversions

Les conversions d'unités sont une source importante d'erreurs, en particulier lorsque qu'elles s'effectuent avec des tableaux de conversion dont le sens échappe souvent aux élèves. Si les techniques associées semblent maîtrisées dans un premier temps, elles relèvent souvent d'automatismes qui ne s'installent pas durablement et qui ne permettent pas toujours une vérification des résultats.

Il est plus efficace de consolider et de mémoriser les relations importantes entre les unités, qui permettent ensuite d'effectuer les conversions usuelles. Ainsi retenir que 1 m^2 = 100 dm^2, soit à partir d'un dessin donnant du sens, soit à partir de la relation 1 m^2 = 1 m × 1 m = 10 dm × 10 dm = 100 dm^2 permet ensuite d'effectuer des conversions par multiplication ou division par 100.

De la même manière les conversions de km/h en m/s sont facilitées. Ainsi
$132\text{ km/h} = \frac{132\text{ km}}{1\text{ h}} = \frac{132\,000\text{ m}}{3\,600\text{ s}} = \frac{1\,320\text{ m}}{36\text{ s}} = \frac{110\text{ m}}{3\text{ s}} \approx 36{,}67\text{ m/s}$.

Les conversions de durées doivent faire l'objet d'un traitement spécifique. Ainsi la conversion en mesure décimale de 3 h 50 min peut être traitée de différentes manières :

- en s'appuyant sur les connaissances antérieures sous la forme suivante : 60 min = 1h donc 1 min = $\frac{1}{60}$ h (ou en divisant 1 par 60) donc 50 min = 50 × $\frac{1}{60}$ h = $\frac{50}{60}$ h ≈ 0,8 h (ou en divisant 50 par 60) ce qui permet d'obtenir 3 h 50 min ≈ 3,8 h.
  On utilise ici le coefficient de proportionnalité existant entre les mesures de temps en minute et en heure.
- en partant de la relation fondamentale 60 min = 1h donc 10 min = $\frac{1}{6}$ h donc 50 min = 5 × 10 min = 5 × $\frac{1}{6}$ h = $\frac{5}{6}$ h ≈ 0,8 h. Ce qui permet d'obtenir le même résultat en utilisant cette fois le coefficient de linéarité existant entre 60 min et 10 min.

La conversion de la mesure décimale en mesure sexagésimale peut également se traiter de différentes manières. Par exemple pour 1,7 h :

- en s'appuyant sur les connaissances antérieures sous la forme suivante : 1 h = 60 min donc
  1,7 h = 1 h + 0,7 h = 1 h + 0,7 × 1 h = 1 h + 0,7 × 60 min = 1 h + 42 min = 1 h 42 min
  1,7 h = 1 h + 0,7 h puis sachant que 1 h = 60 min donc $\frac{1}{10}$ h = 0,1 h = 6 min donc
  0,7 h = 7 × 0,1 h = 7 × 6 min = 42 min on obtient le résultat. Cette méthode a l'avantage d'être très opérationnelle en calcul mental
- Une fois encore on utilise le coefficient de proportionnalité entre minute et heure ou un coefficient de linéarité.

Remarques

- Dans ces calculs certaines étapes sont à faire mentalement.
- On peut aussi varier la présentation et utiliser des équivalences du type : 1 h = 60 min donc 0,1 h = 6 min (on divise par 10) donc 0,7 h = 42 min (on multiplie par 7).
- On rappelle que les calculatrices utilisées au collège permettent d'effectuer ces conversions.
- On veillera à n'effectuer que des conversions « réalistes » avec la situation travaillée.

Grandeurs quotient

Pour la résolution de problèmes utilisant des grandeurs quotients, trois démarches peuvent être utilisées :

- le recours à plusieurs formules à connaître et utiliser en fonction de la grandeur cherchée ;
- le recours à la seule formule de la grandeur quotient que l'on utilise par égalités successives ;
- l'utilisation de la proportionnalité.

Par exemple pour trouver le temps nécessaire pour parcourir 700 m à une vitesse constante de 4,5 km/h, on peut :

- connaître l'égalité $t = \frac{d}{v}$ et l'utiliser en calcul écrit ou à l'aide d'une calculatrice.
  $t = \frac{700\text{ m}}{4,5\text{ km/h}} = \frac{0,7\text{ km}}{4,5\text{ km/h}} = \frac{7}{45}$ h, résultat à convertir en 9 min 20 s ;
- connaître uniquement l'égalité $v = \frac{d}{t}$ et l'utiliser :
  $v = 4,5\text{km/h} = \frac{4,5\text{km}}{1\text{h}} = \frac{4500\text{ m}}{3600\text{s}} = \frac{500\text{m}}{400\text{s}} = \frac{100\text{m}}{80\text{s}} = \frac{700\text{m}}{560\text{s}}$. Il reste ensuite à convertir 560 s en 9 min 20 s ;
- utiliser le fait que 4,5km/h revient à parcourir « 4,5 km en 1 h » et utiliser des conversions et la proportionnalité pour se ramener à 700 m.

On peut remarquer que les deux dernières méthodes reviennent strictement au même mais avec une présentation différente. Elles ont l'avantage de préserver le sens.

On encouragera les élèves à se familiariser avec diverses procédures, certaines étant plus ou moins opérantes suivant les situations.

L'utilisation des unités dans les calculs est ici indispensable, faute de quoi, les égalités deviendraient fausses. De plus cela permet aussi d'éviter des erreurs fréquentes du type :
$t = \frac{700}{4,5} \approx 156$ s = 2 min 36 s.

Différenciation

Pour différencier dans la classe il est possible d'agir sur les contenus, les processus, les productions, les structures ou dispositifs de classe.

La différenciation des contenus peut consister à proposer des tâches permettant des résolutions différentes ou plus ou moins expertes, des énoncés plus ou moins mathématisés, des données numériques plus ou moins aisées à manipuler, des utilisations variées de logiciels. Elle ne dispense pas de garder des objectifs communs, fixés par les programmes, mais avec des niveaux de maîtrise différents.

La différenciation des processus repose entre autre sur le fait de permettre différents niveaux de maîtrise et de réalisation pour un même contenu, plusieurs techniques de résolution pour une même tâche. Cette différenciation est en lien direct avec les stratégies d'enseignement dont certaines ont été décrites précédemment, notamment pour les conversions et les calculs utilisant des formules.

Il est important d'aider les élèves à mettre en place des images mentales voire de continuer à les faire manipuler, par exemple en dénombrant le nombre de cm^2 présents dans un dm^2.

Les outils numériques et l'usage de la calculatrice permettent aussi de différencier. Pour la conversion de durées par exemple, la connaissance des fonctions de la calculatrice permet de vérifier et donc de s'auto-corriger mais aussi tout simplement de faire ces conversions.

De même, permettre de faire des figures à la règle et au compas sur papier quadrillé ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique dans le cadre de problèmes visant à trouver une longueur, une aire ou un angle est aussi un moyen de permettre aux élèves ayant des difficultés avec la trigonométrie ou les formules de proposer une solution.

Il convient cependant d'être attentif à ne pas créer des groupes de niveaux hermétiques. Il est important que les différentes techniques, les différents niveaux de maîtrise soient rencontrés par tous les élèves. Le but étant qu'ils puissent faire un choix, savoir ce qu'ils connaissent des concepts étudiés et ce qu'il leur reste à acquérir. Ce temps n'est pas forcément celui de la synthèse, il peut aussi exister au sein de travaux en groupes hétérogènes.

La différenciation des structures ou dispositifs de classe porte en particulier sur la façon de créer et de faire varier les groupes (travail en autonomie, en binômes, en groupes homogènes ou hétérogènes). L'important étant qu'ils soient favorables aux échanges, à la coopération, à la confrontation d'idées et au travail.

La différenciation des productions permet comme son nom l'indique de différencier les réalisations et les restitutions des tâches effectuées. Les élèves peuvent proposer des exposés écrits ou oraux, des affiches, des vidéos, des documents électroniques... Il pourra par exemple être intéressant de faire réaliser et d'afficher dans la classe des mesures réellement observables (1cm, 1dm, 1m ; $1cm^2$, $1dm^2$, $1m^2$; $1cm^3$ $1dm^3$, 1L, $1m^3$; périmètre, aire, volume), ou des agrandissements d'une figure de base...

Un des intérêts de cette différenciation porte sur la communication de ces productions aux autres élèves de la classe ou du collège.

Exemples de situations d'apprentissage

Exemples de questions flash :

- Grandeurs et calculs
- Agrandissement et réduction de volume
- Expression d'une grandeur en fonction d'une autre
- Comparaison de périmètres et d'aires

Exemples de taches intermédiaires :

- Épicentre d'un séisme
- Aire, prix et pourcentage : isolation d'une maison
- Calcul de volumes et utilisation d'un débit : lampes à huile
- Calcul d'une vitesse et conversion dans un contexte historique - James Cleveland Owens dit Jesse Owens
- Paris – Marseille
- Calcul d'un temps dans un contexte réel - Record de vitesse terrestre
- Calcul d'une vitesse en nœuds marins - Régate de voile
- Calcul d'une durée - Gousses de vanille

Tâches avec prise d'initiative :

- Un char pour défiler
- Le saut à ski
- The largest cup of coffee in the world (en interdisciplinarité avec l'anglais)
- Un train à prendre
- La water-ball

Interdisciplinarité

Le thème « grandeurs et mesures » se prête particulièrement bien aux activités interdisciplinaires, lesquelles permettent de mettre en œuvre les connaissances et savoir-faire du programme. Cela peut concerner aussi bien des tâches intermédiaires (Introduction de la notion de vitesse moyenne), des tâches avec prise d'initiative (comme la ressource d'accompagnement de l'ancien socle Le piton de la fournaise) et aussi s'ouvrir à la pratique d'une langue étrangère comme l'illustre l'activité sur la plus grande tasse de café.

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder le thème grandeurs et mesures avec les élèves. Certains de ces documents ont été produits dans le cadre de l'accompagnement de programmes de mathématiques antérieurs. À ce titre, ces ressources s'inscrivent dans un contexte pédagogique désormais ancien. Néanmoins, elles proposent des éléments toujours pertinents.

- Grandeurs et mesures au collège
- Ressources d'accompagnement des anciens programmes et de l'ancien socle
- L' Edubase mathématique propose de nombreux scenarios pédagogiques qui s'appuient souvent sur les outils numérique.
- La tâche complexe et Tâches complexes, IREM de Clermont-Ferrand
- Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique - ROUCHE N., 1994, Repères - IREM, n° 15, pp. 25-36.
- Les grandeurs en mathématiques au collège, Partie I : Une Atlantide oubliée - CHEVALLARD Y., BOSCH M., 2000
- Les grandeurs en mathématiques au collège, Partie II : Mathématisations - CHEVALLARD Y., BOSCH M., 2002
- Aire et Périmètre, une ressource publiée en 2011 dans le cadre des dispositifs relais.
- Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs (6 volumes : les angles, les longueurs, les aires, les volumes, les durées, les prix) - IREM de Poitiers, Groupe collège.
- Les volumes au collège - IREM d'Orléans-Tours, groupe collège.
- Activités mentales et Automatismes au collège - IREM de Clermont-Ferrand, 2010, Brochure A.P.M.E.P. n°191.
- Grandeur, mesure, Brochure A.P.M.E.P. n° 46, collection Mots, Tome 6, 1982.
- Le sens de la mesure - ROUCHE N., 1992, Didier Hatier.
- Mathématiques d'école. Nombres, mesures et géométrie - PERRIN D., 2005, Cassini, Paris.

Sur la différenciation

- Document ressource pour l'ancien socle commun dans l'enseignement des mathématiques au collège - Palier 3 (fin de scolarité obligatoire) - Compétence 3 : Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique
- La différenciation pédagogique
- Exemples de dispositifs sur la différenciation pédagogique
- CEDRE 2014 – Mathématiques en fin de collège : une augmentation importante du pourcentage d'élèves de faible niveau – DEPP, Note d'information n°19, mai 2015