Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes: les nombres décimaux

Objectifs

Au cycle 3, les nombres décimaux sont introduits à partir des fractions décimales. L'écriture à virgule est ensuite présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales. Cette notation permet la mise en place des règles de comparaison et de calcul. Les quatre opérations sur les décimaux sont étudiées, mais la division est limitée au cas où le diviseur est un entier.

Même si les décimaux ont été introduits à partir des fractions décimales, beaucoup d'élèves, à l'entrée du cycle 4, associent encore la nature d'un nombre à son écriture. Pour eux, un nombre s'exprime toujours par une suite de chiffres et les nombres décimaux se différencient des nombres entiers par la présence de la virgule. Ils ne perçoivent pas, par exemple, 17 ou $\frac{5}{2}$ comme des nombres décimaux.

La poursuite, au cycle 4, du travail sur les nombres décimaux vise plusieurs objectifs :

- Amener tous les élèves à différencier la nature d'un nombre (notamment décimal) de son écriture et à passer de l'une de ses désignations à une autre. Concevoir, par exemple, $3{,}5$; $3{,}50$; $\frac{35}{10}$; $\frac{7}{2}$; $3+\frac{1}{2}$ comme des désignations différentes d'un même nombre ;
- Poursuivre le travail sur la comparaison des nombres décimaux. Il permet notamment de faire prendre conscience aux élèves de la possibilité d'intercaler un nombre décimal entre deux nombres qui pourraient être perçus à tort comme des nombres consécutifs (par exemple $7{,}24$ et $7{,}25$) ;
- Consolider les techniques opératoires étudiées au cycle 3 sur les nombres décimaux, notamment la priorité de la multiplication sur l'addition et la soustraction ;
- Introduire la division par un nombre décimal ;
- Utiliser les nombres décimaux pour exprimer des mesures de grandeurs et repérer des points autres qu'entiers sur la droite graduée.

Le travail mené tout au long du cycle sur les nombres relatifs concerne non seulement les entiers, mais aussi les décimaux et plus généralement les rationnels ; il viendra à ce titre compléter l'étude des décimaux dont l'introduction au cycle 3 porte uniquement sur les décimaux positifs.

Liens avec les domaines du socle

La compréhension et l'utilisation de différentes écritures d'un nombre décimal, sa représentation sur la droite graduée, les passages entre ses différents modes de représentation contribuent à l'acquisition du langage mathématique pour penser et communiquer (domaine 1).

La pratique du calcul (mental et écrit, exact et approché) engageant des nombres décimaux, l'utilisation de valeurs approchées décimales pour modéliser et résoudre des problèmes scientifiques et d'ordres de grandeurs pour contrôler des résultats contribuent à l'étude des systèmes naturels et des systèmes techniques (domaine 4).

Progressivité des apprentissages

La division par un nombre décimal est introduite dès la classe de 5^{e}, parallèlement à la consolidation des techniques opératoires déjà étudiées au cycle 3. La maîtrise de ces techniques, en lien avec la compréhension des nombres et des opérations, est entretenue tout au long du cycle 4.

Le travail sur l'écriture décimale, initié au cycle 3 et poursuivi tout au long du cycle 4, est un point d'appui pour l'étude des puissances de 10 qui est formalisée dès la classe de 4^{e}.

Parallèlement à la maîtrise des techniques calculatoires sur les nombres décimaux, les élèves sont amenés, tout au long du cycle, à résoudre des problèmes faisant intervenir des nombres décimaux.

Stratégies d'enseignement

Pour beaucoup d'élèves, à l'entrée en 5^{e}, la conception d'un nombre décimal comme un objet mathématique et non comme une écriture est encore en cours de construction, le sens des opérations et les techniques opératoires sur les nombres décimaux sont encore en cours d'acquisition. De plus, certains élèves se sont forgé des représentations fausses qui, si elles peuvent s'avérer performantes dans des situations particulières, constituent des obstacles pour la suite des apprentissages. Il est donc indispensable que le professeur identifie les conceptions erronées afin de développer les stratégies d'enseignement qui permettront de les déstabiliser.

Quelques conceptions erronées

- **Assimilation de la virgule à un trait de fraction ;** c'est ainsi que, pour certains élèves $\frac{14}{10}$ = 14,10.
- **Difficulté à concevoir qu'un même nombre puisse avoir plusieurs désignations ;** ainsi, 1+ $\frac{4}{10}$; $1{,}4$; $1{,}40$ ne sont pas perçus comme différentes écritures d'un même nombre .
- **Le « nombre à virgule » vu comme un « entier déguisé », comme si la virgule n'existait pas.** Ce rôle « fantôme» de la virgule conduit certains élèves à écrire $4{,}3 < 4{,}06 < 4{,}249$ en le justifiant par le fait que $43 < 406 < 4249$, ou à percevoir 2,47 comme « le » successeur de 2,46, au même titre que 247 est celui de 246 .
- **Le « nombre à virgule » vu comme l'accolement de deux entiers, la virgule jouant le rôle de « frontière » entre les deux.** Cela conduit par exemple à écrire : $4{,}3 < 4{,}06 < 4{,}249$ (avec comme justification : « 3 est plus petit que 6, lui-même plus petit que 249 ») ;ou encore : $2{,}6 \times 3{,}4 = 6{,}24$; $15{,}7 + 12{,}6 = 27{,}13$ ou encore à percevoir $5{,}100$comme « le » successeur de $5{,}99$.
- **Une connaissance mal installée du système décimal** peut conduire un élève, dans le nombre $234{,}678$, à percevoir le chiffre 7 comme le chiffre des dixièmes en raison de

la position supposée des dixièmes comme symétrique de celle des dizaines, ou encore à écrire $4{,}249 < 4{,}16 < 4{,}1$en justifiant que les millièmes sont « forcément» plus petits que les centièmes, eux-mêmes plus petits que les dixièmes.

- **Des techniques mal automatisées et non contrôlées** peuvent aboutir à une confusion sur la position de la virgule dans le résultat d'une addition posée ou d'une multiplication posée comme dans la multiplication ci-dessous :

$$\begin{array}{r} 2{,}3 \\ \times\ \ 5{,}5 \\ \hline 1\,1\,5 \\ 1\,1\,5\ \ \\ \hline 1\,2\,6{,}5 \end{array}$$

- **L'application de règles au-delà de leur domaine de validité** *;* c'est ainsi que l'extension aux décimaux de la règle du déplacement de la virgule ou de l'ajout de zéros pour la multiplication des entiers par des puissances de 10 contribue à des erreurs du type :
    - 1,4×10 = 1,40 ; 1,4 : 0,1 = 0,14
    - 12×0,5 > 12; $\frac{12}{0{,}5}$ < 12 (car « multiplier augmente un nombre et diviser le diminue »).
- **L'usage social des nombres décimaux à l'oral peut être à l'origine de confusions,** comme dans les exemples suivants : « un kilo cinq » s'écrit en fait $1{,}5$ kg alors que « un euro cinq » s'écrit en fait $1{,}05$ €.

La pratique régulière du calcul réfléchi doit permettre de « déconstruire » ces représentations erronées et parfois résistantes.

La construction d'automatismes

S'il permet d'aller plus vite une fois qu'on a compris, un automatisme ne permet pas de comprendre plus vite ; avant d'être institutionnalisée puis automatisée, une « règle » (comme celle, déjà citée, du déplacement de la virgule vers la droite ou vers la gauche) doit avoir été justifiée par le professeur et comprise par les élèves pour ne pas être employée en dehors de son cadre de validité.

La pratique régulière du calcul réfléchi permet à la fois de comprendre l'origine des règles et d'ancrer dans la durée la construction des mécanismes opératoires. Pratiqué en amont de la formalisation de ces mécanismes, le calcul réfléchi peut être mis en œuvre sur des exemples génériques. Pratiqué juste après l'institutionnalisation, sur des exemples assez proches de la situation d'introduction, il permet l'appropriation de la notion en cours d'étude. En aval, une pratique régulière, sur le long terme, permet d'automatiser les procédures et les propriétés des nombres engagés dans le calcul et s'avère nécessaire pour garantir la pérennité des acquisitions. L'analyse collective, sous la conduite du professeur, des différentes stratégies mises en œuvre et des éventuelles erreurs commises contribue à donner du sens aux objets mathématiques mis en jeu et aux techniques à automatiser.

Dans le cadre de l'apprentissage des nombres décimaux, on entretiendra de façon régulière les automatismes liés à la somme, à la différence, au produit de nombres décimaux, au quotient d'un nombre décimal par un entier, notions abordées au cycle 3, sur des exemples présentant de véritables enjeux. L'un de ces enjeux est de permettre d'identifier une erreur liée à l'incompréhension de l'écriture à virgule ; par exemple, un calcul du type $1{,}4 + 0{,}15$ permet d'identifier l'erreur liée à la conception de la virgule frontière par les élèves qui fournissent $1{,}19$ comme réponse, alors que le même calcul, posé sous la forme $1{,}40 + 0{,}15$ ne permet pas de débusquer l'erreur.

La compréhension de l'erreur peut s'appuyer sur différents registres d'expression : celui de la langue naturelle (on ajoute 1 dixième plus 5 centièmes à 1 unité plus 4 dixièmes), mais aussi celui des fractions décimales.

L'introduction de la division d'un décimal par un décimal pourra se faire dans le cadre de cette pratique, sur une durée suffisamment longue, à petites doses et de manière progressive.

La consolidation des priorités opératoires

La consolidation des priorités opératoires introduites au cycle 3 est indispensable car ces priorités sont à la base de la compréhension et de la production d'expressions, qu'elles soient numériques ou littérales. L'écriture en ligne d'une succession de calculs simples engageant des nombres décimaux, notamment prescrits par des programmes de calcul, est une stratégie d'enseignement possible.

> **EXEMPLE :**
> Prendre un nombre ;
> lui ajouter $1{,}8$;
> multiplier le résultat par $3{,}2$.
>
> Écrire l'expression numérique traduisant ce programme en prenant 10 comme nombre de départ.

Il pourra s'avérer fructueux de comparer les résultats obtenus avec une calculatrice scientifique et avec une calculette, ces deux outils ne respectant les mêmes règles de priorité entre opérations.

Le choix du nombre d'instructions d'un programme de calcul et des nombres auquel il s'applique permet une différenciation au sein de la classe.

Parallèlement au travail sur les programmes de calcul qui concernent l'aspect procédural d'un calcul, les élèves seront amenés à travailler sur sa forme structurale (somme, différence, produit, quotient).

Par exemple identifier $12{,}3 + 2{,}5 \times 7{,}1$ comme une somme: celle de $12{,}3$ et du produit de $2{,}5$ par $7{,}1$.

L'utilisation de la droite graduée

Le recours à la droite graduée permet de travailler la compétence « représenter » décrite dans les programmes des cycles 3 et 4 par les passages dans les deux sens qu'elle permet de réaliser entre le registre symbolique de l'écriture du nombre et le registre graphique de sa représentation.

Plusieurs situations d'enseignement se prêtent à l'utilisation de la droite graduée.

- **Mesurer des grandeurs et encadrer des mesures, notamment en variant les unités.** Effectuer des mesures « qui ne s'expriment pas en un nombre entier d'unité » permet de revenir à l'utilité première des décimaux (résoudre des problèmes pour lesquels les entiers sont défaillants) et de travailler l'intercalation des décimaux.
- **Repérer des points sur une droite graduée.** Les activités de repérage peuvent être très variées au niveau des situations et des questionnements proposés, mais aussi des types de graduation et des outils utilisés (droite graduée, papier millimétré, sous unités partiellement ou non représentées, présentation « en zoom ») et de la nature de l'écriture des nombres à repérer (désignation orale, écritures fractionnaires, décimales, décompositions diverses, etc.). On pourra se reporter à l'activité développée au paragraphe VI.
- **Intercaler des décimaux.** « Donner dix nombres entre $4{,}67$ et $4{,}68$ » est une situation classique qui peut être enrichie par la question de savoir s'il peut y en avoir 100, 1000, $10\ 000$, etc.

Dans le cadre d'une différenciation pédagogique, on pourra remplacer $4{,}67$ et $4{,}68$ par 4 et $4{,}01$.

L'utilisation de valeurs approchées et le contrôle des résultats

La résolution de problèmes permet aux élèves de prendre conscience que les nombres décimaux ne permettent souvent que d'y apporter des réponses approchées.

Conformément à l'écriture du domaine 4 du socle (paragraphe « démarches scientifiques »), les ordres de grandeurs sont utilisés pour estimer et contrôler les résultats.

Points de vigilance

La rigueur et la précision de la dénomination orale des nombres décimaux contribuent à leur bonne compréhension. Le professeur doit avoir conscience du caractère modélisant de sa propre pratique et du fait que la dénomination d'usage social du type « 3 virgule 08 » peut renforcer les fausses représentations, notamment celle de la « virgule frontière ». Les échanges en classe offrent l'occasion de manipuler mentalement les changements de registres, ce que facilitent les formulations du type « 308 centièmes » ou « 3 unités plus 8 centièmes ». Attendre cette rigueur de la part des élèves les aide à établir les liens entre les différentes désignations et contribue à la compréhension des nombres décimaux. La maîtrise, par tous les élèves, des techniques opératoires sur les nombres décimaux est un objectif de fin de cycle. Un travail spiralé, mené sur toute la durée du cycle, sous forme de calcul mental ou réfléchi doit permettre de l'atteindre. Mais la technique s'acquiert aussi à travers la résolution de problèmes et nombreux sont ceux qui sollicitent les nombres décimaux; leur résolution contribue à consolider la compréhension de ces nombres. Ces problèmes peuvent relever de la vie courante, d'autres disciplines ou d'autres champs des mathématiques : calculs de coûts, coefficients de proportionnalité ou de linéarité, d'échelles ou de moyennes, mesures de grandeurs, conversions d'unités, etc.

Différenciation

Pour les élèves qui n'ont pas encore acquis une compréhension automatisée des décimaux, il est nécessaire de recourir à des outils de manipulation permettant de visualiser les rapports entre unité, dixième, centième pour asseoir le sens des désignations. Parmi ces outils on peut citer la droite graduée, mais aussi le carré ou le cube unité partagés en sous-unités, les tangrams, etc. On pourra se reporter à l'activité développée au paragraphe VI.

Une bonne connaissance de faits numériques comme les multiples de 25 et leur relation avec 100, les divisions par $10, 100, 1000$, etc. est indispensable à la bonne compréhension des nombres décimaux. Un travail routinier sur ces prérequis permet de dépasser certaines difficultés.

Pour certains élèves, un manque d'assurance dans le calcul écrit constitue un véritable handicap et une source de blocage. Or, de même qu'une orthographe incertaine ne saurait interdire l'écriture, le manque de dextérité calculatoire ne doit pas constituer un blocage à toute activité mathématique. Il est donc indispensable de ne pas limiter l'activité des élèves les plus fragiles à des tâches purement techniques et il est déconseillé d'attendre systématiquement leur maîtrise avant de leur proposer des problèmes à résoudre, ce qui peut d'ailleurs constituer un puissant levier pour motiver l'acquisition des techniques.

Dans le cadre d'un approfondissement, l'étude de quelques cas de non décimalité pourra être traitée.

Exemples de situations d'apprentissage

Contrôle de la vraisemblance du résultat d'un calcul sur les nombres décimaux

Exemple de la division par un nombre décimal

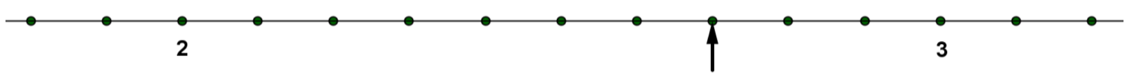
On propose aux élèves de calculer $\frac{0,6}{0,2}$. On peut s'attendre à ce que certains proposent comme résultat $0,3$ ou $0,03$. Ils effectuent en effet la division de 6 par 2 et mettent soit un chiffre après la virgule en appliquant l'algorithme de l'addition, soit deux chiffres après la virgule en appliquant l'algorithme de la multiplication.
La référence au quotient permet d'identifier $\frac{0,6}{0,2}$ comme étant le nombre par lequel il faut multiplier $0,2$ pour obtenir $0,6$. L'invalidation des résultats $0,3$ et $0,03$ repose alors sur les opérations $0,3 \times 0,2 = 0,06$ et $0,03 \times 0,2 = 0,006$.
Pour certains élèves, la compréhension de l'erreur passe par la verbalisation de la notion de partage en « Combien de fois $0,2$ entre-t-il dans $0,6$? » ou en sa formulation équivalente « Combien de fois 2 dixièmes entrent-ils dans 6 dixièmes ? ». Ces formulations permettent d'amener les élèves à prendre conscience «qu'il y a plus d'une fois $0,2$ dans $0,6$ », et donc que $\frac{0,6}{0,2}$ ne peut valoir ni $0,3$ ni $0,03$.
Il convient également d'insister sur le fait que le résultat de la division par un nombre décimal inférieur à 1 est plus grand que ce nombre. Cela doit faire partie des automatismes de contrôle.

Utilisation de la droite graduée

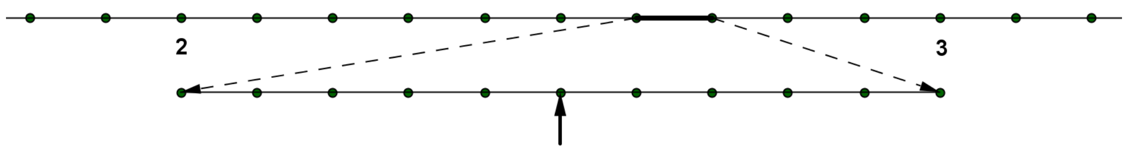
L'activité ci-dessous utilise des zooms à différentes échelles.

Source : [académie de Rennes]

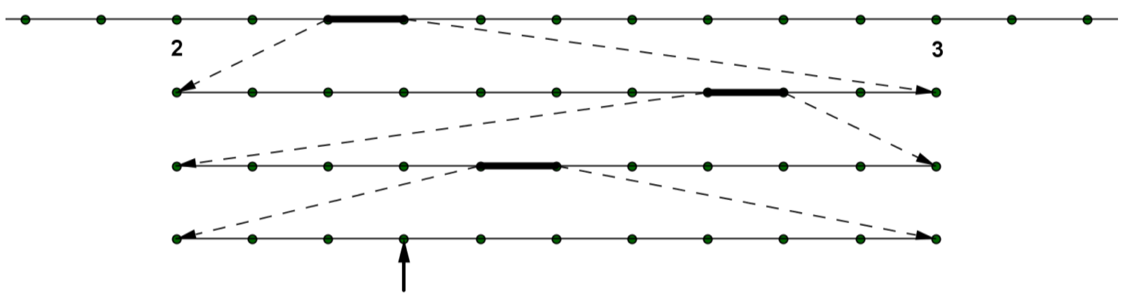
1. Quel est le nombre indiqué par la flèche sur la droite graduée ci-dessous ?



2. On a représenté un agrandissement d'une partie de la droite graduée.
   Quel est le nombre indiqué par la flèche sur l'agrandissement ?

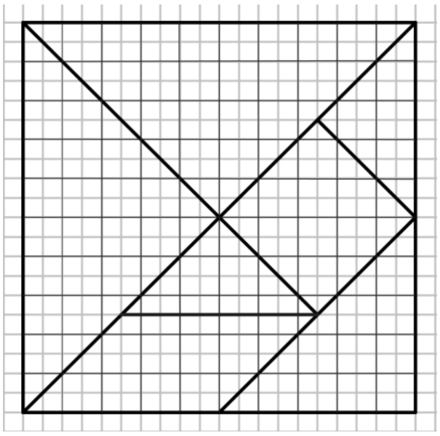


3. On a représenté des agrandissements successifs d'une partie de la droite graduée.
   Quel est le nombre indiqué par la flèche sur le dernier agrandissement ?



Cette activité peut être complétée par l'exercice inverse, qui consiste par exemple à représenter 2,472 sur la droite graduée.

Mesure de grandeurs



La mesure de la surface des pièces d'un Tangram permet de faire le lien entre écritures décimales, fractions décimales et fractions non décimales puisqu'on peut utiliser comme unité d'aire soit le plus petit des triangles, dont l'aire est égale à un seizième de l'aire totale, soit le centimètre carré, en utilisant le quadrillage.

Autres exemples d'activités

- Des exemples de questions flash
- Un exemple de tâche intermédiaire : un problème de coûts
- Un exemple de tâche avec prise d'initiative : Épaisseur d'une feuille de papier

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder la notion de nombre décimal avec les élèves :

- Le nombre au cycle 3 SCEREN - CRDP, septembre 2012
- Les nombres au collège
- Le calcul numérique au collège
- Découvrir de nouveaux nombres au collège - brochure IREM de Strasbourg 2012
- Des maths ensemble et pour chacun - Rouquès, J.-P. & Staïner, H.(2010) - Cinquième. Nantes : CRDP des Pays de la Loire
- Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège BLOLON J. 1996, Identifiant BU : 96PA05H050
- Banque des exercices de Mathématiques sans Frontières Junior
- Enseigner et apprendre les nombres décimaux : dispositif d'évaluation diagnostique Decival sur le site du Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Louvain (Belgique)
- La sixième entre fractions et décimaux - Brochure de l'IREM de Lyon