Raisonner

Le programme de mathématiques du cycle 4 offre une place de choix à la compétence « raisonner » dans laquelle il regroupe les démarches suivantes :

- résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques) : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions ;
- mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui ;
- démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion ;
- fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.

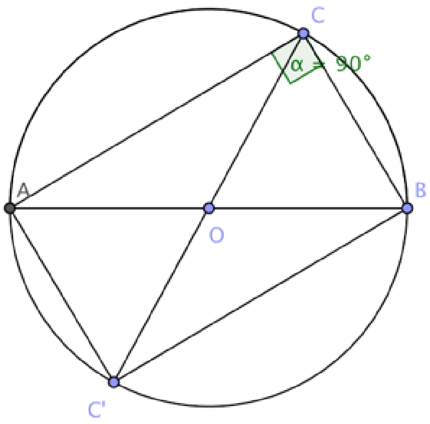
Chacune des étapes de résolution d'un problème (compréhension de l'énoncé et de la consigne, recherche, production et rédaction d'une solution) fait appel au raisonnement, processus mental permettant d'effectuer des inférences. Rappelons qu'une inférence est une opération mentale par laquelle on accepte qu'une proposition soit vraie en vertu de sa liaison avec d'autres propositions. Les phases de recherche, de production et de rédaction de preuve font appel à des raisonnements de différentes natures.

Les raisonnements inductifs et abductifs, essentiellement mis en œuvre dans la phase de recherche, permettent d'aboutir à l'émission de conjectures qu'il s'agira ensuite de valider ou d'invalider. Si la production d'un contre-exemple suffit à invalider une conjecture, sa validation repose sur une démonstration, moyen mathématique d'accès à la vérité. On rappelle que « démontrer », c'est « donner à voir » les différentes étapes d'une preuve par la présentation, rédigée sous forme déductive, des liens logiques qui la sous-tendent.

Le raisonnement inductif consiste à généraliser une propriété observée sur des cas particuliers. Il fonctionne selon le schéma suivant : constatant sur des exemples que, lorsque A est vraie, alors B est vraie, on émet la conjecture que (A implique B) est vraie.

Le raisonnement abductif consiste à présumer une cause plausible d'un résultat observé. Il fonctionne selon le schéma suivant : pour démontrer que B est vraie, sachant que (A implique B) est vraie, on va démontrer que A est vraie. Le raisonnement abductif est notamment utilisé sous forme d'une analyse remontante, encore appelé chaînage arrière, qui consiste, à partir du résultat que l'on veut démontrer, à repérer une ou plusieurs propriétés (conditions suffisantes) qui, si elle(s) étaient établie(s), permettrai(en)t d'atteindre le résultat par application d'un théorème identifié. On substitue alors momentanément au problème de départ un (ou plusieurs) nouveau(x) problème(s) consistant à établir ces conditions intermédiaires.

Exemple : ABC est un triangle rectangle en C. On veut démontrer que C appartient au cercle de diamètre [AB].
On note O le milieu de [AB] et on remplace la proposition à démontrer par l'égalité OA=OB=OC ; pour atteindre ce résultat, on construit le symétrique C' de C par rapport à O. Selon le principe du chaînage arrière, il suffit alors de montrer que AC'BC est un rectangle.



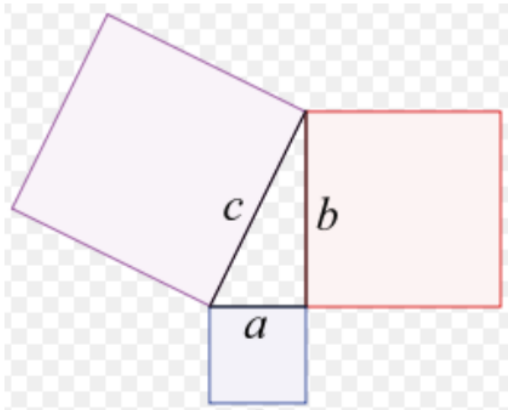
Par la diversité et la multiplicité des situations particulières qu'elle permet d'observer, l'utilisation d'outils logiciels (de géométrie, de calcul, de simulation, de programmation) est un support aux raisonnements inductifs et abductifs et favorise la formulation de conjectures. Il est important de faire comprendre aux élèves le caractère incertain de toute conjecture et la nécessité, soit de l'invalider par la production d'un contre-exemple, soit de prouver sa vérité par une démonstration.

Celle-ci fait appel au raisonnement déductif qui (entre autres) s'appuie sur :

- la **déduction** proprement dite (ou règle de détachement ou *modus ponens*), qui fonctionne selon le schéma suivant : sachant que (A implique B) est vraie et que A est vraie, on conclut que B est vraie. Le premier pas d'une déduction consiste à reconnaître une situation de référence A (une configuration géométrique, une situation de proportionnalité, une propriété de nombres, etc.) ; le second consiste à appliquer le théorème qui stipule que (A implique B) ;
- la **disjonction de cas**, qui fonctionne selon le schéma suivant : pour montrer que (A implique B), on sépare l'hypothèse A de départ en différents cas recouvrant toutes les possibilités et on montre que l'implication est vraie dans chacun des cas ;
- Le raisonnement par **l'absurde** (*reductio ad absurbum*) qui fonctionne selon le schéma suivant : pour montrer que A est vraie, on suppose qu'elle est fausse et par déduction on aboutit à une absurdité.

Afin de convaincre les élèves du rôle de la démonstration en mathématiques comme moyen d'accès à la vérité, il importe de leur apprendre à distinguer une propriété conjecturée ou vérifiée sur des exemples d'une propriété démontrée. Pour ce faire, le terme de « démonstration » ne doit pas être galvaudé et la seule illustration d'un raisonnement ne saurait être désignée comme telle. Par exemple, si l'illustration présentée ci-dessous constitue une image mentale pertinente de l'égalité entre l'aire du carré construit sur l'hypoténuse et la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit, elle ne saurait être présentée comme une démonstration du théorème de Pythagore.

$$a^2+b^2 = c^2$$



En revanche, certains théorèmes, énoncés de manière générale peuvent être démontrés uniquement sur des exemples choisis parce qu'ils donnent une bonne idée du cas général (on dit alors qu'ils sont « génériques »). Cela peut être par exemple le cas pour la démonstration des propriétés des opérations sur les fractions.

De même, il convient de systématiquement qualifier les énoncés mathématiques selon leur statut, en distinguant définitions, théorèmes admis et théorèmes démontrés. Les théorèmes traduisant une propriété caractéristique pourront être formulés en distinguant dans leur énoncé le sens direct et le sens réciproque.

Les notions mathématiques qui figurent au programme du cycle 4 offrent toutes des possibilités de raisonnement, soit dans l'accès à la preuve d'un énoncé, soit dans son utilisation. Il n'est pas question de démontrer tous les théorèmes ou propriétés figurant au programme, mais de déterminer en équipe pédagogique les démonstrations qui seront retenues sur toute la durée du cycle en raison de leur caractère formateur, de leur accessibilité aux élèves et de l'intérêt qu'elles présentent pour faciliter l'accès au sens des notions mises en jeu.

L'apprentissage du raisonnement et de la démonstration est un processus long et délicat qui doit se faire de manière progressive, dans la durée, et tenir compte des deux contraintes suivantes :

- tout d'abord, la nécessité de séparer les tâches de résolution du problème (recherche et obtention de la preuve) de celle de la rédaction d'un texte qui traduit l'organisation de la démonstration ;
- ensuite, l'apprentissage de la rédaction se fait notamment lorsque l'élève est confronté à l'expérience de la communication de sa solution. L'envie de se faire comprendre associée à la critique de ses pairs est, pour un élève, un levier de progrès certainement plus puissant que la fourniture, par le professeur, d'un modèle de rédaction. Si, pour être communicable et compréhensible, une démonstration mathématique doit respecter des règles syntaxiques, il faut reconnaître que celles-ci ne sont pas naturelles pour les élèves. Des exigences excessives et prématurées d'un modèle de rédaction standardisée peuvent induire de leur part

des comportements relevant de l'imitation plus que de la compréhension. En accordant une place disproportionnée aux activités purement formelles de nature rhétorique (« je sais que… or… donc »), on risque d'éloigner les élèves du raisonnement lui-même et du plaisir de chercher. Afin de ne pas détourner de la résolution de problèmes les élèves ayant des difficultés à entrer dans les codes de rédaction d'une démonstration, il importe de valoriser les productions spontanées, écrites ou orales, issues des phases de recherche et d'expérimentation (calculs seuls, croquis destinés à comprendre l'exercice, idées de preuve, plan de preuve, etc.). Souvent imparfaites et inabouties, elles constituent de véritables objets d'étude pour la classe au cours d'un débat permettant de faire émerger progressivement les critères d'une rédaction performante, sans pour autant modéliser le travail. Progressivement, la phase de rédaction, entamée ou non en classe, sera dévolue aux élèves, en classe ou en dehors de la classe, en veillant à différencier les exigences de formalisme selon l'objectif d'apprentissage (le raisonnement ou la communication) et la capacité des élèves à entrer dans les codes de la démonstration. En particulier, il est tout à fait possible d'exprimer dans le langage naturel un raisonnement mathématique tout en respectant parfaitement les règles logiques d'inférence. De même, si l'on peut faire apparaître, dans certains cas, l'intérêt d'une mise en forme de la démonstration sous forme déductive (en mettant la conclusion à la fin de la démonstration), il est cependant admis de la placer au début, suivie de « car…, parce que… et que… ».

Il importe également de ne pas cantonner la démarche de raisonnement à sa seule forme déductive et de ne pas la limiter à un thème particulier des mathématiques (traditionnellement celui de géométrie), mais bien de la placer au cœur de toute activité mathématique.

Les situations proposées doivent donc ménager à la fois des temps de recherche et d'expérimentation permettant de formuler des conjectures, des temps de mise en commun et d'argumentation permettant de produire une preuve et des temps de mise en forme (démonstrations rédigées). Pour solliciter la curiosité de l'élève, susciter chez lui l'envie de relever un défi intellectuel et motiver sa recherche, il est souhaitable que l'énoncé du problème soit assez bref et facile à comprendre et qu'il n'induise ni une solution ni même une méthode de résolution ; un moyen de laisser à chaque élève l'initiative de sa démarche consiste à limiter les questions intermédiaires ou celles dont l'énoncé mentionne ce qu'il s'agit de trouver (« démontrer que… »). Cette attention particulière devrait permettre à chaque élève de démarrer sa recherche par des tâtonnements, des dessins, des essais numériques, avec ou sans l'aide de logiciels. Les problèmes dont la solution est accessible par plusieurs modes de raisonnement (algébrique, géométrique, etc.) sont particulièrement intéressants.

Exemples de problèmes

Ci-dessous quelques exemples de problèmes sont proposés, rattachés à différents thèmes du programme, et mettant en œuvre des raisonnements de types varié

Ecriture décimale [5e]

Exemple de problème
Dans les écritures décimales de deux nombres entiers, le chiffre des dizaines est 7 et celui des unités est 6. Quels sont les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de leur produit ?

Commentaire
Raisonnement déductif à travers l'utilisation de l'écriture décimale.

Multiples et diviseurs

Exemple de problème
La somme des chiffres de 42 est un multiple de 6 et 42 est un multiple de 6 (idem pour 84). Peut-on affirmer que, si la somme des chiffres d'un nombre entier est un multiple de 6, alors ce nombre est un multiple de 6 ?

Commentaire
Infirmation par production d'un contre-exemple.

Proportionnalité

Exemple de problème

On augmente la longueur d'un rectangle de 10 % et on diminue sa largeur de 10 %. Comment varie son aire ?

Commentaire

L'élève peut raisonner de manière inductive en fixant des valeurs numériques pour la longueur et la largeur et faire varier ces valeurs

Raisonnement déductif par application d'un pourcentage.

Nombres décimaux

Exemple de problème

Existe-t-il un nombre décimal dont le carré est égal à 2 ?

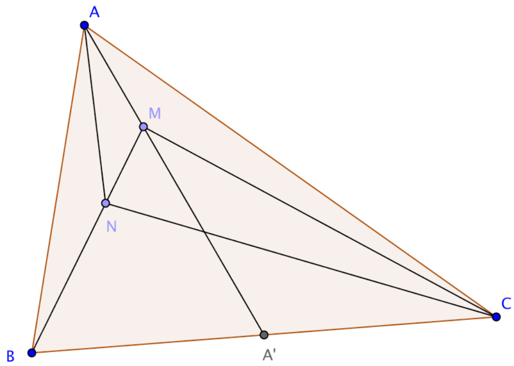
Commentaire

Une démarche inductive basée sur des essais (à la main puis à la calculatrice) permet d'émettre la conjecture qu'il n'existe pas de nombre décimal dont le carré est égal à 2.
Cette conjecture est ensuite démontrée à l'aide d'un raisonnement par l'absurde et disjonction de cas.
On montre d'abord qu'il n'existe aucun nombre entier dont le carré est égal à 2.
Puis, en distinguant les différentes valeurs qu'aurait sa dernière décimale, on montre qu'il n'existe aucun nombre décimal non entier dont le carré est égal à 2.

Utilisation des aires

Exemple de problème

Où positionner le point M à l'intérieur du triangle ABC pour que les triangles AMB et AMC aient la même aire ?



Commentaire

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet de conjecturer une condition suffisante : l'appartenance de M à la médiane [AA'].

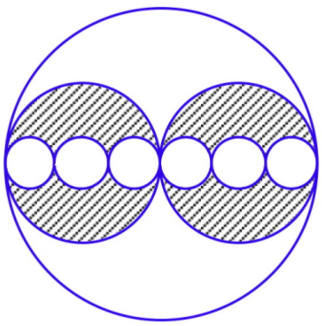
Démonstration par les aires (lemme du chevron).

Démonstration de la condition nécessaire par un raisonnement par l'absurde : on suppose que N n'appartient pas à la médiane [AA'] (en étant par exemple à l'intérieur du triangle ABA'), on note M le point d'intersection de (BN) et (AA') et on compare les aires des triangles ANB, AMB, AMC, ANC.

Fractions, aire du disque

Exemple de problème

A quelle fraction du grand disque correspondent les six petits disques ? A quelle fraction du grand disque correspond la surface hachurée ?



Commentaire

Analyse de figure.

Vitesse

Exemple de problème

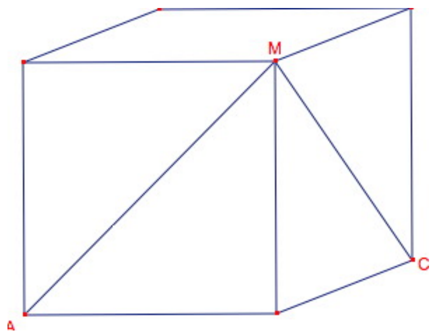
Un funiculaire monte du pied d'une colline à son sommet à la vitesse moyenne de 14 km/h.

Le conducteur peut-il régler la vitesse lors de la descente pour que la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours soit de 28 km/h ?

Géométrie dans l'espace

Exemple de problème

Sur un cube, on a tracé deux diagonales, comme indiqué sur le dessin ci-dessous. Quelle est la mesure de l'angle formé par ces deux diagonales ?



Commentaire

Identification d'une figure plane à l'intérieur d'une configuration de l'espace.

Géométrie, Équations

Exemple de problème

Deux tours, hautes de 30 et 40 mètres sont distantes l'une de l'autre de 50 mètres. Un puits est situé entre les deux tours. Deux oiseaux s'envolent en même temps du sommet de chaque tour et volent à la même vitesse en ligne droite avant de se rejoindre au sol. En quel point se rejoignent-ils ?

Commentaire

Modélisation de la situation.

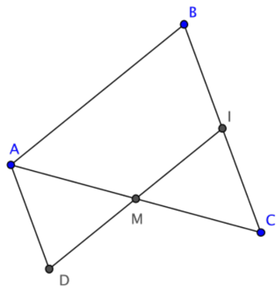
Raisonnement déductif à travers l'utilisation du théorème de Pythagore.

Résolution d'une équation.

Géométrie plane

Exemple de problème

A, B, C sont trois points non alignés, I est le milieu de [BC] et D est le point tel que ABID est un parallélogramme. Pourquoi le milieu M de [ID] est-il également le milieu de [AC] ?



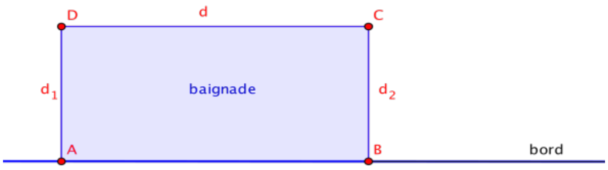
Commentaire

Raisonnement déductif utilisant des propriétés du parallélogramme.

Approche de la notion de fonction

Exemple de problème

Un maître-nageur dispose d'une corde de 160 m de long pour délimiter une zone de baignade surveillée rectangulaire. Où doit-il placer les bouées A et B pour que l'aire de la zone de baignade soit maximale ?



Commentaire

Utilisation d'un tableur ou d'une calculatrice pour une approche numérique.

Modélisation algébrique.

Calcul littéral

Exemple de problème

Peut-on écrire 2016 comme somme de quatre entiers consécutifs ? Et 2018 ? Et ton année de naissance ?

Quels sont les nombres qui peuvent s'écrire comme somme de quatre entiers consécutifs ?

Commentaire

Raisonnement inductif basé sur des essais. Emission de conjectures.

Utilisation du calcul littéral comme outil de démonstration.

Bibliographie

- Raisonnement et démonstration
- Site de l'académie de Bordeaux : Initiation au raisonnement
- IREM de Rennes : L'enseignement de la démonstration
- « Initiation au raisonnement déductif au collège » Gilbert Arsac, Gisèle Chapiron, Alain Colonna, Gilles Germain, Yves Guichard, Michel Mante - Presses universitaires de Lyon, IREM de Lyon
- « Des mathématiques ensemble et pour chacun, 5ème » Jean-Philippe Rouquès, Hélène Staïner - CRDP Pays de la Loire
- « Des mathématiques ensemble et pour chacun, 4ème » Jean-Philippe Rouquès, Hélène Staïner - CRDP Pays de la Loire