

Mouvement circulaire uniforme

THÉMATIQUE

- Cinématique.

CONCEPT OU NOTION ABORDÉE

- Les notions de vitesses (et accélération) moyennes et instantanées
- La vitesse et l'accélération d'un mobile en mouvement circulaire uniforme.

OBJECTIFS DE FORMATION

- Préciser les notions de vecteur vitesse (ou vecteur accélération) instantanée et de vecteur vitesse (ou vecteur accélération) moyenne.
- Donner les caractéristiques du vecteur position, du vecteur vitesse instantanée et du vecteur accélération instantanée dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.

Introduction

Consulter la page éducol associée au thème « [Programmer en physique-chimie](#) ».

Présentation des activités

À partir d'un logiciel, les élèves réalisent une simulation d'un mouvement circulaire uniforme puis tracent les vecteurs vitesse instantanée et accélération instantanée.

Activité 1 : Simulation (milieu de cycle)

Il s'agit, dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, de construire le vecteur vitesse instantanée.

Pistes de validation et d'expérimentation

On pourra valider les calculs en considérant le cas très simple d'un cercle de rayon unité parcouru avec une vitesse angulaire valant 1 rad.s^{-1} : les normes des vecteurs position, vitesse et accélération doivent alors avoir la même valeur numérique dans leurs unités respectives (1 m , 1 m.s^{-1} , 1 m.s^{-2}).

L'expérimentation peut porter sur l'étude de l'influence du rayon de la trajectoire, de la valeur absolue de la vitesse angulaire ou du sens de rotation.

Activité 2 : Simulation (fin de cycle)

Il s'agit, dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, de construire le vecteur accélération instantanée.

Pistes de validation et d'expérimentation

Même pistes que pour l'activité 1.

LOGICIELS UTILISÉS

- Logiciel de géométrie dynamique GeoGebra®
- Tableur Regressi®

COMPÉTENCES INFORMATIQUES TRAVAILLÉES

- Définir des paramètres numériques.
- Réaliser des calculs mathématiques simples.
- Afficher la courbe caractéristique d'une fonction.
- Représenter un vecteur.

Exemples de contextualisation

Pour contextualiser le mouvement circulaire uniforme dans cette activité, de nombreux supports existent, en voici quelques-uns :

- modélisation simplifiée du mouvement de la Lune étudié dans le référentiel géocentrique (centré sur le barycentre Terre-Lune) ;
- le mouvement d'un satellite artificiel géostationnaire étudié dans le référentiel géocentrique ;
- le mouvement d'une masse accrochée au bout d'un fil auquel on impose un mouvement de fronde.

NB : un lien pourra être fait avec la seconde loi de Newton : la Lune « tombe » perpétuellement puisque son vecteur accélération est dirigé vers le centre de la Terre, tout comme l'attraction gravitationnelle qu'exerce la Terre sur la Lune.

De la situation physique au traitement numérique

Un point matériel M en mouvement circulaire uniforme décrit un cercle de centre O et de rayon R, à la vitesse angulaire ω constante.

Dans le repère cartésien (Ox ; Oy), les équations horaires paramétriques de M sont :

$$x(t) = R \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$y(t) = R \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Les vecteurs vitesses et accélérations instantanées s'obtiennent par dérivations successive de ces expressions par rapport au temps.

Il est également intéressant de visualiser les vitesses et accélérations moyennes obtenues sur durées faibles devant la période de rotation.

Ce que les élèves doivent retenir

- Dans le cas du mouvement circulaire uniforme, le vecteur vitesse instantanée est tangent à la trajectoire et a pour sens celui du mouvement.
- Dans le cas du mouvement circulaire uniforme, le vecteur accélération instantanée est orthogonal à la trajectoire (« radial ») et est dirigé vers le centre de la trajectoire (« centripète »).
- Les grandeurs instantanées sont les valeurs limites des grandeurs moyennes évaluées sur un intervalle de temps dont la durée tend vers 0.

Remarque : dans le cadre des programmes en vigueur au moment de la parution de cette ressource, la situation proposée n'est pas facilement réalisable., la plupart des élèves auraient besoin d'un accompagnement fort et de beaucoup de temps. Elle nécessite en effet une technicité importante, tant au niveau mathématique qu'informatique. Elle pourrait cependant donner lieu à des activités dans le cadre de l'accompagnement personnalisé ou comme travail personnel pour des élèves se projetant dans des études supérieures à dimensions mathématique et physique marquées.

Activité 1 : Représentations graphiques des vecteurs vitesses et position (milieu de cycle)

Les propositions suivantes ne sont pas prescriptives. Il s'agit de bases pour illustrer la situation d'apprentissage qu'il convient d'ajuster en fonction de sa place dans la progression et dans la séquence pédagogique, du niveau de maîtrise par les élèves de l'outil informatique choisi, etc.

Exemples de consignes pour les élèves

Programmation (compétence Réaliser)

1. Représenter la position du point $M(t)$ à différentes dates.
2. Représenter les vecteurs positions à ces différentes dates, de O à $M(t)$.
3. Représenter les vecteurs vitesses à ces différentes dates en chacun de ces points $M(t)$.
4. Prolongement : Représenter les vecteurs vitesses moyennes en calculant la variation du vecteur position entre deux instants voisins.

Validation et expérimentation (compétence Valider)

1. Vérifier que le vecteur vitesse instantanée a pour direction la tangente à la trajectoire et est orienté dans le sens du mouvement quelle que soit la date t .
2. Modifier la valeur du rayon R de la trajectoire et vérifier que le vecteur vitesse :
 - est toujours tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement ;
 - a une valeur d'autant plus grande que le rayon R est plus grand.
3. Modifier la valeur de la vitesse angulaire ω et vérifier que le vecteur vitesse :
 - est toujours tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement ;
 - a une valeur d'autant plus grande que la vitesse angulaire ω est plus grande.
4. Modifier le signe de la vitesse angulaire ω et vérifier que le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire, mais que son sens a changé.
5. Dans le cas du prolongement de la question 4 de la partie programmation, faire varier la durée de l'intervalle de temps qui sépare les deux instants considérés pour le calcul de la vitesse moyenne.

Conclusion (compétences Analyser et Communiquer)

Rédiger une conclusion présentant le mouvement circulaire uniforme en utilisant a minima les termes suivants : trajectoire, vecteur vitesse, direction, sens, valeur (ou norme).

Exemples d'aides et de réalisations pour la programmation

Aides pour la programmation avec un tableur (Regressi[®])

1. Créer une simulation en faisant varier la date t de 0 à 10 s.
2. Saisir les paramètres $R = 1$ m et $\omega = 1$ rad.s⁻¹.

3. Créer les grandeurs calculées :

$$x=R*\cos(\omega*t)_m$$

$$y=R*\sin(\omega*t)_m$$

$$vx=DIFF(x,t)$$

$$vy=DIFF(y,t)$$

$$v=\text{Sqrt}(vx^2+vy^2)$$

4. Représenter la trajectoire, y en fonction de x, et cliquer sur « vitesse » et sur « axes orthonormés ».

Dans le dossier « [mouvement circulaire en mécanique.zip](#) », vous trouverez le fichier « VitesseCirculaire.rw3 » présentant des résultats.

Prolongement : visualisation des vitesses moyennes

Aides pour la programmation avec le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra®

- Ouvrir un fichier. Y définir numériquement la valeur du rayon R du cercle ainsi que celle de la vitesse angulaire ω . Créer un curseur qui permet de faire varier la date t ainsi que la durée h (entre 0,001 et 2 par exemple).
- Positionner le point O, centre du repère, ainsi que les points M(t) et M(t + h) de coordonnées respectifs :

$$M(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R.\cos(\omega.t) \\ R.\sin(\omega.t) \end{pmatrix} \quad M(t)=\begin{pmatrix} x(t+h) \\ y(t+h) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R.\cos(\omega.(t+h)) \\ R.\sin(\omega.(t+h)) \end{pmatrix}$$

- Tracer enfin la trajectoire c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon R.
- Tracer le vecteur $\overrightarrow{OM}(t+h)$ qui lie O à M(t+h) ainsi que le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ qui lie O à M(t).
- Positionner le point A tel que $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OM}(t+h)$ et B tel que $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OM}(t)$. Tracer enfin le vecteur vitesse moyenne défini par :

$$\overrightarrow{v_{\text{moyenne}}}=\frac{\overrightarrow{OM}(t+h)-\overrightarrow{OM}(t)}{h}$$

- Fixer la date t. Faire tendre h vers 0. Le vecteur vitesse moyen devient alors le vecteur vitesse instantanée.

Dans le dossier « [mouvement circulaire en mécanique.zip](#) », vous trouverez le fichier « VitesseCirculaire.ggb » présentant un exemple de résultat obtenu.

Activité 2 : Représentations graphiques des vecteurs accélération et position (fin de cycle)

Les propositions suivantes ne sont pas prescriptives. Il s'agit de bases pour illustrer la situation d'apprentissage qu'il convient d'ajuster en fonction de sa place dans la progression et dans la séquence pédagogique, du niveau de maîtrise par les élèves de l'outil informatique choisi, etc.

Exemples de consignes pour les élèves

Programmation (compétence Réaliser)

1. Représenter la position du point $M(t)$ à différentes dates.
2. Représenter les vecteurs vitesse à ces différentes dates, en chacun de ces points $M(t)$.
3. Représenter les vecteurs accélération à ces différentes dates, en chacun de ces points $M(t)$.
4. Prolongement : Représenter les vecteurs accélérations moyennes en calculant la variation du vecteur vitesse entre deux instants voisins.

Validation et expérimentation (compétence Valider)

1. Vérifier que le vecteur accélération instantanée a pour direction le rayon du cercle (« radial ») et est orienté vers le centre du cercle (« centripète ») quelle que soit la date t .
2. Modifier la valeur du rayon R de la trajectoire et vérifier que le vecteur accélération :
 - est toujours radial et centripète ;
 - a une valeur d'autant plus grande que le rayon R est plus grand.
3. Modifier la valeur de la vitesse angulaire ω et vérifier que le vecteur accélération :
 - est toujours radial et centripète ;
 - a une valeur d'autant plus grande que la vitesse angulaire ω est plus grande.
4. Dans le cas du prolongement la question 4 de la partie sur la programmation, faire varier la durée de l'intervalle de temps qui sépare les deux instants considérés pour le calcul de l'accélération moyenne.

Conclusion (compétences Analyser et Communiquer)

Rédiger une conclusion présentant le mouvement circulaire uniforme en utilisant a minima les termes suivants : trajectoire, vecteur accélération, direction, sens, valeur (ou norme).

Exemples d'aides et de réalisations pour la programmation

Aides pour la programmation avec un tableur (Regressi®)

1. Créer une simulation en faisant varier la date t de 0 à 10 s.
2. Saisir les paramètres $R = 1$ m et $\omega = 1$ rad.s⁻¹.
3. Créer les grandeurs calculées :

$$x=R*\cos(\omega*t)_m$$

$$y=R*\sin(\omega*t)_m$$

$$vx=DIFF(x,t)$$

$$vy=DIFF(y,t)$$

$$ax=DIFF(vx,t)$$

$$ay=DIFF(vy,t)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

4. Représenter y en fonction de x et cliquer sur « accélération » et sur « axes orthonormés ».

Dans le dossier « [mouvement circulaire en mécanique.zip](#) », vous trouverez le fichier « AccélérationCirculaire.rw3 » présentant un exemple de réalisation.

Prolongement : visualisation des accélérations moyennes

Aides pour la programmation avec le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra®

1. Ouvrir un fichier. Définir numériquement la valeur du rayon R du cercle, ainsi que celle de la vitesse v_0 définie à partir de la vitesse angulaire par $v_0 = R \times \omega$. Créer un curseur qui permet de faire varier la date t ainsi que la durée h (entre 0,001 et 2 par exemple).
2. Positionner le point O, centre du repère, ainsi que les points M(t) et M(t + h) de coordonnées respectifs :

$$M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ R \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{pmatrix} \qquad M(t+h) = \begin{pmatrix} x(t+h) \\ y(t+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega \cdot (t+h)) \\ R \cdot \sin(\omega \cdot (t+h)) \end{pmatrix}$$

3. Tracer enfin la trajectoire, c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon R. Tracer, en partant du point M(t), le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ tangent à la trajectoire et de valeur v_0 .
4. Tracer, en partant du point M(t+h), le vecteur vitesse $\vec{v}(t+h)$ tangent à la trajectoire et de valeur v_0 .
5. Positionner le point A tel que $\vec{MA} = \vec{v}(t+h)$ et B tel que $\vec{AB} = -\vec{v}(t)$. Tracer enfin le vecteur accélération moyenne défini par :

$$\vec{a}_{\text{moyenne}} = \frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h}$$

6. Fixer la date t. Faire tendre h vers 0. Le vecteur accélération moyen devient alors le vecteur accélération instantanée.

Dans le dossier « [mouvement circulaire en mécanique.zip](#) », vous trouverez le fichier « AccélérationCirculaire.ggb » présentant un exemple de production.