

Bond graphs : une méthode pluridisciplinaire

PHILIPPE FICHOU¹

L'outil bond graph est un langage graphique unifié pour tous les domaines des sciences de l'ingénieur et confirmé comme une approche structurée de la modélisation et de la simulation des systèmes pluridisciplinaires.

La modélisation d'un système technique par bond graph ne nécessite pas l'écriture de lois générales de conservation.

Ce n'est pas nouveau : l'énergie est un, pour ne pas dire « le », concept essentiel dans la description de l'évolution des systèmes technologiques. On le retrouve dans tous les domaines : il constitue le lien entre ceux-ci. Fort de cette constatation, Henry M. Paynter (1923-2002) a introduit le concept de *bond graph* (BG, graphe de liaisons) en 1961. Ce dernier a été développé, notamment par Karnopp et Rosenberg, pour donner aujourd'hui une méthodologie d'approche globale des systèmes pluritechnologiques qui constituent au XXI^e siècle la grande majorité des produits industriels qui nous entourent et que notre enseignement doit présenter à nos étudiants et nos élèves. Comme on le verra avec cette présentation, la méthode est élégante, et son utilisation, sur des modèles simples, peut être rapide et efficace. Elle ne nécessite en effet que quelques « briques » pour élaborer un modèle complet, directement « dessiné » sur un logiciel adapté permettant d'obtenir des résultats directs sans avoir à écrire une seule équation : c'est le logiciel qui les détermine et les affiche ainsi que les résultats afférents.

La méthodologie BG n'est pas une méthode graphique supplémentaire par rapport à celles qui existent déjà, comme, par exemple, les schémas blocs, pour représenter les fonctions de transfert des systèmes. En effet, cette dernière ne s'applique qu'aux systèmes linéaires, alors que la méthode BG concerne tous les systèmes dans tous les domaines (linéaires, non linéaires, continus, échantillonnés, numériques, électroniques, hydrauliques, mécaniques, thermiques...). La méthode BG permet de traiter les chaînes d'énergie et d'information.

Qu'est-ce qu'un bond graph ? C'est un graphe orienté, faisant apparaître des variables dynamiques, qui traduisent les transferts d'énergie entre systèmes. Il est basé sur les liens de puissance du type proposé sur la figure 1.

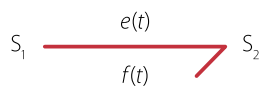


Figure 1. ▲ Le principe du bond graph

Les variables $e(t)$ et $f(t)$ représentent respectivement l'effort et le flux entre les systèmes S_1 et S_2 dont le produit $P(t) = e(t)f(t)$ n'est rien d'autre que la puissance instantanée transférée entre S_1 et S_2 . Les deux variables $e(t)$ et $f(t)$ sont dites conjuguées l'une de l'autre.

Elle repose essentiellement sur la caractérisation des phénomènes d'échanges d'énergie au sein du système. L'industrie automobile française est en pointe dans l'utilisation des bond graphs dans leur démarche mécatronique.

MOTS-CLÉS postbac, modélisation, dynamique, automatique

Le terme « bond graph » est cité pour la première fois dans un programme au niveau de la classe préparatoire PT (voir encadré ci-dessous). La méthode BG apparaît en parallèle avec la méthode des graphes informationnels causaux présentée par l'équipe de l'Ensam de Lille (Jean-Paul Hautier). C'est de bon augure, et dans l'air du temps, où l'on demande à nos étudiants ou élèves non plus de résoudre des équations mais de proposer une modélisation d'un problème afin de l'appréhender pour le comprendre, et peut-être l'améliorer ; la phase de résolution des équations est confiée à un logiciel adapté.

Afin de présenter le plus simplement possible cette méthode, nous allons construire notre premier BG sur un exemple mécanique élémentaire.

Extrait du programme des classes préparatoires filière PT pour la rentrée 2004

II.1.1.d. Représentation causale

- Variable d'état associée à :
 - une masse conservative
 - une raideur
 - un frottement visqueux
- Relation de transformation (équations différentielles)
- Représentations graphiques (graphe informationnel causal ou bond graph)

UN PREMIER BOND GRAPH

Le cas du système parfait

Notre premier bond graph sera développé à partir d'un système simple dans le domaine de la mécanique de rotation, constitué par deux barres 1 et 2 d'inertie respectives I_1 et I_2 par rapport à l'axe de leurs deux liaisons pivots parfaites avec le bâti. Elles sont reliées entre elles par un ressort de torsion de raideur k (figure 2).

Le bond graph a pour origine la représentation graphique des échanges d'énergie entre les phénomènes physiques qui apparaissent à l'intérieur d'un système. Étudions les échanges d'énergie entre les éléments de celui-ci. On pourra repérer trois phénomènes de « stockage » lors du mouvement de l'ensemble : deux de type

1. Professeur en prépa PT PTSI au lycée Vauban de Brest (29)

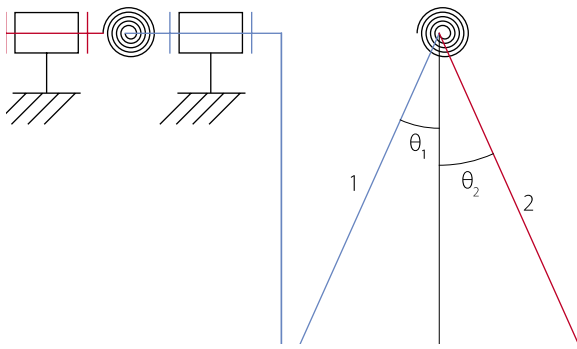


Figure 2. ▲ Le modèle du premier bond graph

cinétique associés aux mouvements des deux solides – il s'agit d'un stockage d'énergie cinétique dû au mouvement de rotation des deux barres – et un de type potentiel associé à la modification de l'angle du ressort – il s'agit là d'un stockage d'énergie potentielle. Dans la méthode BG, le phénomène de stockage cinétique est noté I (comme Inertie ou Inductance) et le phénomène de stockage potentiel est noté C (comme Capacité).

Les transferts d'énergie entre ces trois éléments sont représentés par un trait terminé par une demi-flèche (en dessous pour un trait horizontal et à droite pour un trait vertical). On nommera lien bond graph cet élément. Comme le montre la figure 1, on indique de chaque côté du lien bond graph la variable effort $e(t)$ et la variable flux $f(t)$ dans cet ordre. Pour ce qui nous concerne, et en fonction de notre paramétrage, pour la barre 1, la variable flux sera le taux de rotation $\dot{\theta}_1$ et la variable effort conjuguée sera le moment dynamique $\delta_1 = \dot{\sigma}_1 = I_1 \ddot{\theta}_1$ lié au mouvement du solide 1 (le temps a été omis dans la notation pour une écriture plus synthétique). Le même type de paramètres, mais indicé 2, sera utilisé pour le solide 2. Quant au ressort, la variable effort notée C représentera le couple instantané exercé par le ressort, et la variable flux sera la vitesse de variation angulaire du ressort notée $\Delta\dot{\theta}$. La figure 3 représente le graphisme bond graph lié aux éléments que nous venons de définir.

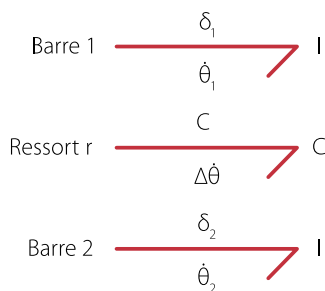


Figure 3. ▲ Les liens BG associés aux éléments de stockage du système des deux barres

Les deux types d'éléments de stockage sont parfaits et ne dissipent pas d'énergie. Nous introduirons par la suite les phénomènes de dissipation.

Nous allons maintenant associer ces trois liens et exprimer ainsi le transfert d'énergie entre eux-ci. L'écriture du bilan de puissance dans ce système se traduit par $(\Sigma P = 0)$.

$$\delta_1 \dot{\theta}_1 + C \Delta \dot{\theta} + \delta_2 \dot{\theta}_2 = 0.$$

On montre aisément (application du PFD à 1 puis à 2) que $\delta_1 = \delta_2 = C$.

Pour exprimer cette égalité des variables « efforts », la méthode BG introduit la jonction 0, ou « 0-jonction », qui représente les transferts d'énergie entre les éléments de stockage pour un effort commun. Le graphisme BG est donné sur la figure 4.

Pour chaque élément de stockage, on fait apparaître le paramètre utilisé pour le représenter.

On a en effet dans notre cas :

- Couple sur le solide 1 : $C_1 = I_1 \frac{d\dot{\theta}_1}{dt}$, paramètre I_1
- Couple sur le solide 2 : $C_2 = I_2 \frac{d\dot{\theta}_2}{dt}$, paramètre I_2
- Couple du ressort r : $C = k \Delta \theta = k \int \Delta \dot{\theta} dt = \frac{1}{C} \int \Delta \dot{\theta} dt$ (par analogie avec une capacité électrique), paramètre $\frac{1}{k}$.

L'égalité des moments donnée plus haut avec le bilan de puissance fournit alors la seconde relation caractérisant la 0-jonction :

$$\dot{\theta}_1 + \Delta \dot{\theta} + \dot{\theta}_2 = 0.$$

Par analogie avec la loi des nœuds de l'électricité, on retrouve cette dernière loi en considérant les variables flux (analogues aux intensités électriques) qui partent du nœud 0 du bond graph de la figure 4.

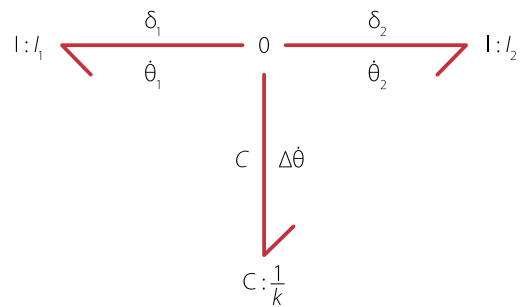


Figure 4. ▲ Le bond graph du système de mécanique de rotation

Le cas du système dissipatif

Nous allons introduire maintenant du frottement entre la barre 2 et le bâti, caractérisé par un couple de frottement noté C_f . Soit μ le facteur de frottement entre les solides en mouvement. Dans la représentation BG, c'est l'élément R qui représente une dissipation d'énergie. Conformément à ce qui a été dit précédemment, la puissance perdue est le produit d'une variable effort, ici C_f , par une variable flux, ici $\dot{\theta}_g$, la vitesse angulaire de glissement. Le lien BG de ce nouvel élément est donné sur la figure 5.

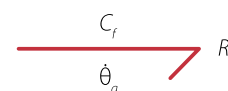


Figure 5. ▲ Le lien BG d'un élément dissipatif

Notre système comporte maintenant trois éléments de stockage et un élément de dissipation. En ce qui concerne la barre 1, pas de changement ; en revanche, pour la barre 2, un nouvel échange d'énergie apparaît. Nous allons introduire une nouvelle jonction qui va caractériser le transfert d'énergie entre les deux barres en prenant en compte l'élément dissipatif. Nous avons noté $\dot{\theta}_g$ le taux de glissement relatif entre la barre 2 et le bâti. Celui-ci est évidemment égal à $\dot{\theta}_2$. Cette égalité se traduit dans la méthode BG par une jonction 1, ou « 1-jonction » (égalité des flux), comme le présente la figure 6.

Pour le lien entre la 0-jonction et la 1-jonction, nous avons noté e la variable effort. Elle est nécessairement égale à l'effort commun de la 0-jonction. Quant à la variable flux, elle est égale au flux commun de la 1-jonction, c'est-à-dire $\dot{\theta}_2$. On a

$$f = \dot{\theta}_g = \dot{\theta}_2.$$

D'autre part, le bilan de puissance au niveau de la 1-jonction se traduit par

$$-ef + \delta_2 \dot{\theta}_2 + C_f \dot{\theta}_g = 0.$$

Et l'on a donc

$$-e + \delta_2 + C_f = 0.$$

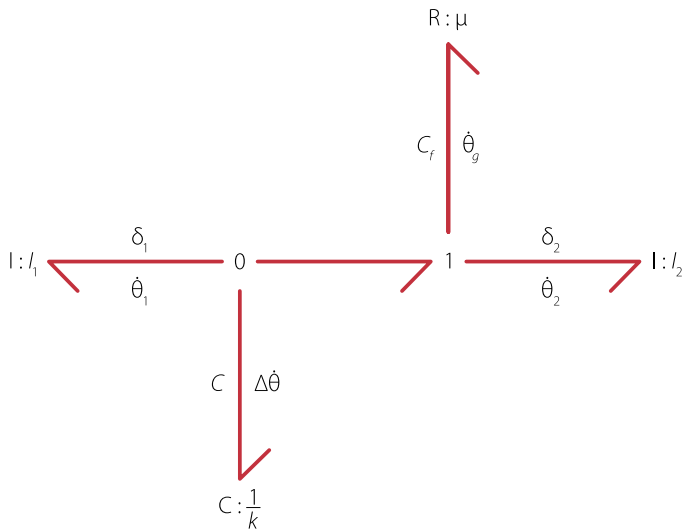


Figure 6. ▲ Le bond graph du système barres et ressort dissipatif

Le signe «-» du premier terme est dû à l'orientation du lien de la 1-jonction associé à la puissance dissipée par le frottement (on retrouve une loi des nœuds pour la 1-jonction).

LES « BRIQUES » DE LA MÉTHODE BOND GRAPH

Les principaux éléments

Les éléments de base de la méthode BG sont au nombre de neuf, que l'on peut classer en quatre groupes :

- les éléments de stockage ou de dissipation déjà vus I, C et R;
- les éléments sources Se (source d'effort) et Sf (source de flux);
- les éléments de transformation réversible TF (transformateur) et GY (gyrateur);
- les éléments de jonctions 0-jonction et 1-jonction.

Nous n'avons pas encore vu les éléments des types 2 et 3. Pour les premiers, il s'agit des éléments sources d'effort (Se) et de flux (Sf) imposés au système. Ainsi, il est possible d'appliquer un couple moteur sur l'axe du bras 1 de notre exemple; il s'agira d'une source d'effort. On peut de même imposer une vitesse de rotation; il s'agira alors d'une source de flux. Ces deux sources sont exclusives l'une de l'autre: on peut imposer soit l'effort soit le flux, mais pas les deux à la fois.

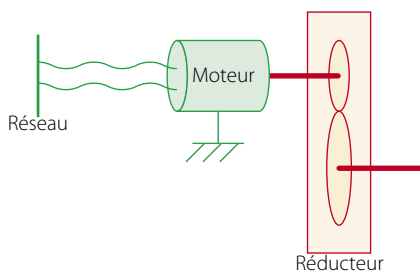


Figure 7. ▲ Le motoréducteur

Pour les seconds, l'élément transformateur TF est associé à un transfert d'énergie couplant les efforts entre eux dans un certain rapport et les flux entre eux dans le rapport inverse. Comme exemple mécanique, on cite classiquement le réducteur, qui «réduit» le taux de rotation entre l'entrée et la sortie mais augmente le couple de sortie de façon inverse par rapport au couple d'entrée. L'élément gyrateur GY, quant à lui, assure une transduction de l'énergie en couplant de façon croisée les efforts et les flux (figure 7). Un moteur électrique à courant continu commandé en tension en est un exemple courant: il «transforme» l'effort à l'entrée (la tension à ses bornes) en un flux (la vitesse de rotation de son axe à la sortie).

Avec ce que nous venons de dire, nous pouvons construire le bond graph d'un motoréducteur, que nous pourrions accoupler à l'arbre 1 de notre système à deux barres.

Sur la figure 8, nous trouvons le tracé classique du modèle électrique de notre motoréducteur. Nous pouvons dénombrer :

- une source d'effort u ;
- quatre éléments de dissipation ou de stockage, R de type résistif et L , J_1 , J_2 de type inertiel;
- un gyrateur de constante K qui transforme la force électromotrice en vitesse de rotation de l'arbre d'entrée du réducteur (équation $e = K\omega_1$);
- un transformateur (le réducteur) tel que $\omega_1 = r\omega_2$.

Pour établir ce BG, nous allons indiquer une procédure systématique de construction d'un BG que nous mettrons en application.

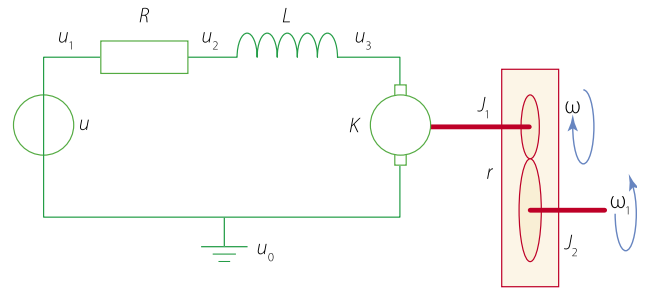


Figure 8. ▲ Le modèle électromécanique du motoréducteur

La procédure

Les étapes ① et ② concernent l'identification des domaines physiques et des éléments :

① Déterminer les domaines physiques du système étudié et rechercher tous les éléments de base: C, I, R, Se, Sf, TF et GY. Donner à chaque élément un nom distinct.

② Introduire une valeur de référence pour les efforts, les vitesses, les pressions... dans chacun des domaines.

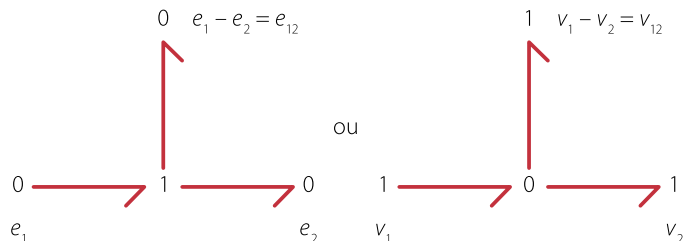
Les étapes ③ à ⑥ décrivent la génération des connexions de la structure :

③ Identifier tous les autres efforts (vitesses...) et leur attribuer un nom propre.

④ Tracer pour ces efforts (ces vitesses...) des 0-jonctions (des 1-jonctions).

⑤ Rechercher toutes les différences entre efforts (entre vitesses) nécessaires pour relier les ports de tous les éléments déterminés à l'étape ①. Leur donner un nom unique marquant cette différence (exemple: e_{12} pour une différence entre l'effort e_1 et l'effort e_2).

⑥ Construire les différences entre efforts en utilisant une 1-jonction (une 0-jonction pour les différences entre vitesses en mécanique) et les représenter comme sur la figure ci-après :

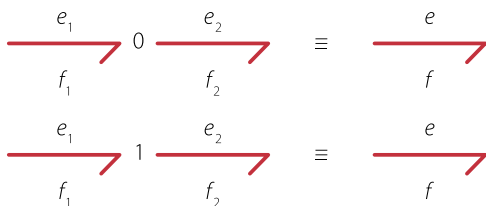


Les éléments peuvent être maintenant connectés :

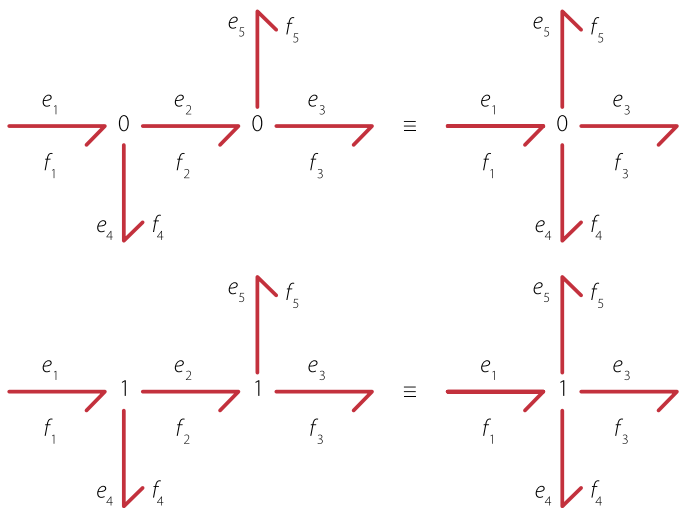
⑦ Relier les ports de tous les éléments trouvés à l'étape ① avec des 0-jonctions des efforts correspondants ou des différences entre efforts (1-jonctions des vitesses ou des différences entre vitesses).

⑧ Simplifier le graphe obtenu en appliquant les règles de simplification suivantes :

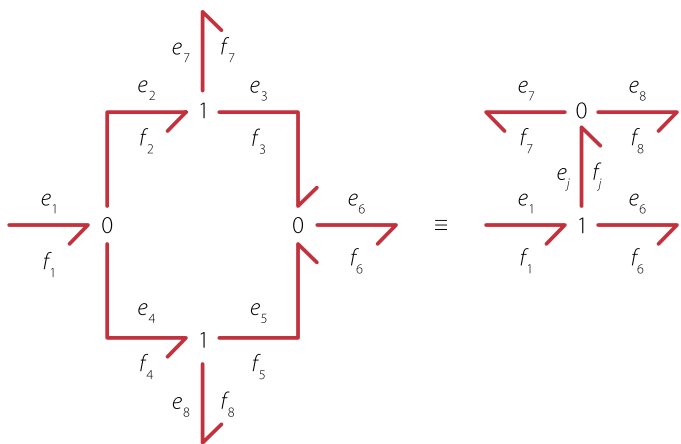
● Une jonction entre deux liens peut être simplifiée si les liens représentent une direction de la puissance unique :



● Un lien entre deux jonctions identiques peut être simplifié et les jonctions peuvent être simplifiées en une seule :

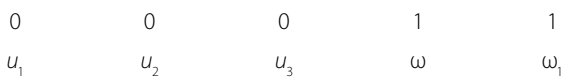


● Deux efforts ou flux identiques construits séparément peuvent être simplifiés en une différence entre deux efforts ou deux flux :



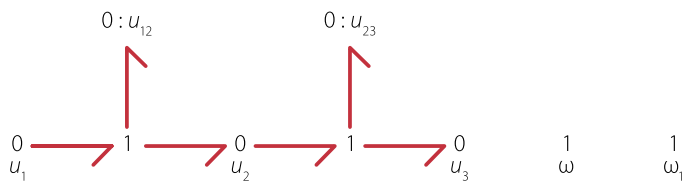
L'application au motoréducteur

- ① L'étape a déjà été réalisée ci-dessus.
- ② Introduisons un potentiel électrique de référence u_0 et un taux de rotation de référence ω_0 .
- ③ Les autres grandeurs sont identifiées sur la figure 8.
- ④ Nous traçons les jonctions associées aux efforts et aux vitesses :

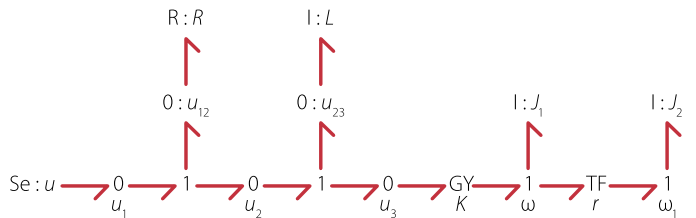


⑤ Faisons apparaître les différences de potentiel aux bornes de la résistance $u_{12} = u_1 - u_2$ et aux bornes de l'inductance $u_{23} = u_2 - u_3$.

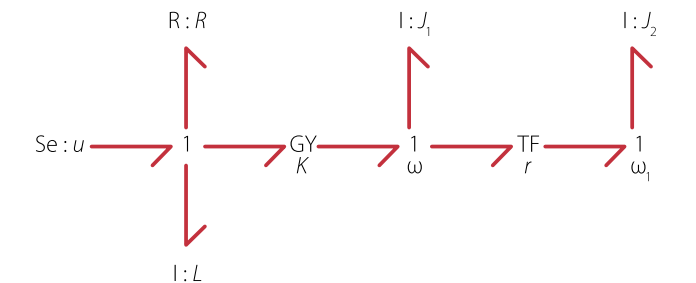
⑥ Traçons ces différences sous forme de BG :



⑦ Connectons tous les éléments trouvés à l'étape ①. On obtient :



⑧ Éliminons des jonctions à puissance nulle en suivant les règles de simplification vues précédemment :



Le résultat obtenu est le BG de notre motoréducteur (il existe d'autres méthodes pour tracer un bond graph ; nous ne les discuterons pas ici). Nous pouvons connecter ce dernier BG à celui du système à deux barres ; nous obtenons la figure 9.

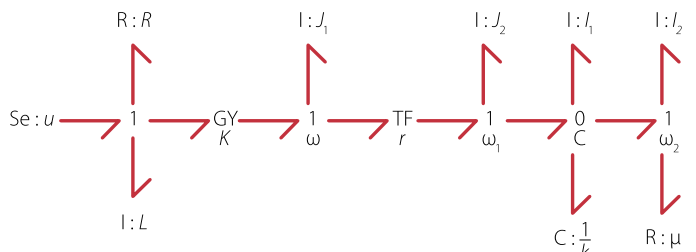


Figure 9. ▲ Le bond graph de l'ensemble motoréducteur et deux barres

Que faire avec ce bond graph ? Beaucoup de choses ; par exemple, l'implémenter dans un logiciel (20-sim, Camp-G, Symbols 2000, MS1...) pour tracer les courbes des variables du processus, obtenir les équations du système, voir les flux d'énergie... Il est également assez facile d'en déduire le schéma bloc dans le domaine linéaire. Avant d'exploiter notre BG, il est nécessaire de rappeler les notions de « variable d'état » et de « causalité », qui sont essentielles dans la méthode BG.

Les variables d'état (variables de puissance et d'énergie)

L'état d'un système correspond à l'ensemble des informations nécessaires sur celui-ci pour déterminer son évolution à partir des seules entrées extérieures. Les variables qui représentent ces informations s'appellent variables d'état. Elles sont liées aux éléments I (énergie cinétique) et C (énergie potentielle) du BG.

Le BG représente les transferts d'énergie. Les variables qui interviennent dans ces transferts sont les efforts $e(t)$ (au sens

large : pression, couple, tension...) et les flux $f(t)$ (au sens large : vitesse, intensité, débit...). La puissance instantanée vaut :

$$P(t) = e(t) f(t).$$

Les variables qui caractérisent l'énergie sont les intégrales premières temporelles des efforts et des flux. On a :

- Moment généralisé : $p(t) = p_0 + \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$
- Déplacement généralisé : $q(t) = q_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$

Le tableau 1 donne les variables de puissance et d'énergie des domaines classiques des sciences de l'ingénieur. Les variables d'état sont généralement liées aux éléments de stockage d'énergie ; ce sont les moments et les déplacements généralisés ci-dessus.

La causalité et le bond graph

La causalité doit être indiquée sur un bond graph afin que celui-ci soit traité de façon numérique ; c'est d'ailleurs le logiciel qui s'en charge. On rappelle que la causalité consiste à imposer un ordre de cause à effet dans les relations entre les variables représentant un système. Sur un BG, la causalité est marquée par un trait perpendiculaire au lien BG à l'une des extrémités de celui-ci (figure 10). Par convention, on impose l'effort du côté du trait de causalité. Le flux est donc imposé de l'autre côté du lien.

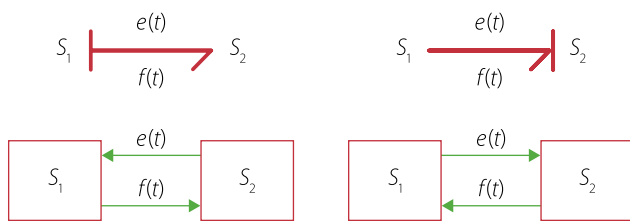


Figure 10. ▲ La causalité

Le signe « \Rightarrow » étant symétrique, la causalité n'apparaît pas avec celui-ci. Comme en informatique, on peut utiliser le signe « $:=$ » pour indiquer la causalité. Par exemple, « $a := b$ » signifie que a est déterminé après l'évaluation de b . On peut maintenant écrire les équations causales pour la figure 10 (avec la notation des langages orientés objet) :

- pour la partie gauche, $S_1 \cdot e := S_2 \cdot e$ et $S_2 \cdot f := S_1 \cdot f$;
- pour la partie droite, $S_2 \cdot e := S_1 \cdot e$ et $S_1 \cdot f := S_2 \cdot f$.

De même qu'il existe une procédure pour tracer un BG, il en existe une pour déterminer la causalité sur un BG (tableau 2). Elle est basée sur les remarques suivantes :

- Les éléments sources (Se et Sf) impose une causalité unique. Pour Se, l'effort est imposé du côté de la flèche ; pour Sf, c'est l'inverse.

Tableau 1. Les variables de puissance et d'énergie selon le domaine

Domaine	Effort e	Flux f	Moment généralisé p	Déplacement généralisé q
Électrotechnique	Tension u	Courant i	Flux magnétique λ	Charge q
Mécanique de translation	Force F	Vitesse v	Quantité de mouvement p	Déplacement x
Mécanique de rotation	Couple C	Taux de rotation ω	Moment cinétique σ	Angle θ
Hydraulique et pneumatique	Pression P	Débit volumique q_v	Impulsion p	Volume V
Thermique	Température T	Flux d'entropie q_s		Entropie S
Chimie	Potentiel chimique μ	Flux molaire q_m		Nombre de moles N

- Pour les 0-jonctions, les 1-jonctions, les transformateurs et les gyrateurs, une contrainte de causalité est imposée (voir tableau 2).
- Pour les éléments de stockage C et I, le choix de la causalité intégrale est préférable au choix de la causalité différentielle. Voici pourquoi : si l'on impose, par exemple, la tension aux bornes d'un condensateur, le courant est le résultat du calcul

$$i := C \frac{du}{dt} ;$$

il s'agit d'une causalité différentielle. Il y a un problème si l'on impose un échelon de tension, car le courant est alors infini dans le condensateur. Ce n'est plus le cas si l'on impose le courant à travers la capacité, car l'équation obtenue est alors

$$u := u_0 + \int i dt ;$$

il s'agit maintenant d'une causalité intégrale qui exclut ce problème. On parle alors de modèle causal. Un modèle différentiel nécessite la connaissance des valeurs futures de la variable, puisqu'il faut connaître la « direction » de son évolution. Le modèle intégral, quant à lui, ne demande que la connaissance du passé de la variable.

- Pour l'élément de dissipation R, il n'y a aucune préférence. La procédure d'affectation de la causalité est la suivante (tableau 3) :

- 1 Affecter les causalités imposées par les éléments sources d'effort et de flux et les propager aussi loin que possible en prenant en compte les contraintes imposées par les transformateurs, gyrateurs, 0-jonctions et 1-jonctions.
- 2 Affecter la causalité intégrale (de préférence) aux éléments de stockage I et C et la propager dans le bond graph.
- 3 Affecter une causalité arbitraire aux éléments dissipatifs R et la propager dans le bond graph.
- 4 Si le bond graph n'est pas complet d'un point de vue causal, affecter une causalité arbitraire aux éléments non traités et la propager au sein du bond graph.

Si, lors des étapes 2 à 4, il existe un conflit, il faut alors utiliser une causalité différentielle pour les éléments C et I de manière à lever le conflit. C'est, nous l'avons vu, le logiciel qui se charge de ce travail. Pour notre exemple, le bond graph causal obtenu est celui de la figure 11.

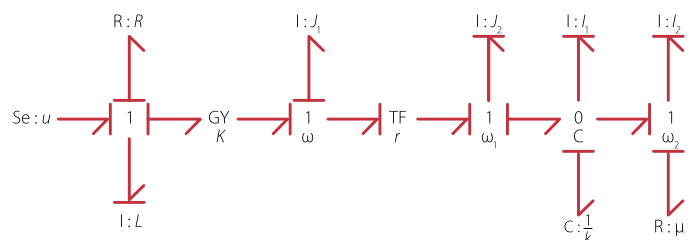
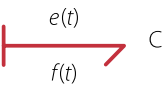
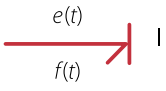
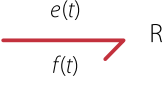
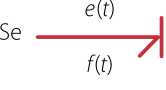
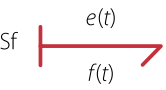
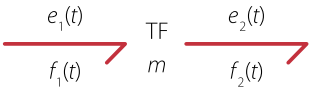
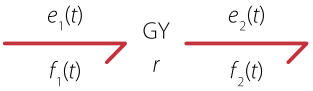
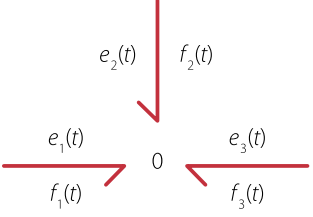
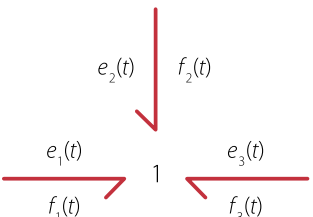


Figure 11. ▲ Le BG causal de l'exemple

Tableau 2. La causalité et le bond graph

Liens et causalités	Schémas de calculs	Type de causalité
	$e(t) := \varphi_c^{-1}(q(t))$	Causalité intégrale
	$f(t) := \frac{d}{dt} [\varphi_c(e(t))]$	Causalité dérivée
	$f(t) := \varphi_I^{-1}(p(t))$	Causalité intégrale
	$e(t) := \frac{d}{dt} [\varphi_I(f(t))]$	Causalité dérivée
	$e(t) := \varphi_R(f(t))$	Causalité résistance
	$f(t) := \varphi_R^{-1}(e(t))$	Causalité conductance
	$e(t) := E(t)$	Causalité imposée
	$f(t) := F(t)$	Causalité imposée
	$\begin{cases} e_1(t) := m e_2(t) \\ f_2(t) := m f_1(t) \end{cases}$	Causalité directe
	$\begin{cases} e_2(t) := \frac{1}{m} e_1(t) \\ f_1(t) := \frac{1}{m} f_2(t) \end{cases}$	Causalité inverse
	$\begin{cases} e_1(t) := r f_2(t) \\ e_2(t) := r f_1(t) \end{cases}$	Causalité directe
	$\begin{cases} f_2(t) := \frac{1}{r} e_1(t) \\ f_1(t) := \frac{1}{r} e_2(t) \end{cases}$	Causalité inverse
	$\begin{cases} e_2(t) := e_1(t) \\ e_3(t) := e_1(t) \\ f_1(t) := -f_2(t) - f_3(t) \end{cases}$	Un seul effort est imposé sur la 0-jonction
	$\begin{cases} f_2(t) := f_1(t) \\ f_3(t) := f_1(t) \\ e_1(t) := -e_2(t) - e_3(t) \end{cases}$	Un seul flux est imposé sur la 1-jonction

Tableau 3. Les éléments BG

Élément bond graph	Représentation	Lois constitutives	Exemples
Stockage d'énergie sans dissipation de type capacitif		$q = q_0 + \int f dt$ cas linéaire $e = \frac{1}{C} q$	Capacité, ressorts linéaire et de torsion, accumulateur hydraulique
Stockage d'énergie sans dissipation de type inertielle		$p = p_0 + \int e dt$ cas linéaire $f = \frac{1}{I} p$	Inductance, masse, inertie
Dissipation d'énergie		$e = Rf$ ou $f = \frac{1}{R} e$	Résistance électrique, frottements secs et visqueux, restriction hydraulique
Source imposant un effort		L'effort e est imposé au système qui impose f à la source	Source de tension, source de pression
Source imposant un flux		Le flux f est imposé au système qui impose e à la source	Source de courant
Transformateur sans dissipation d'énergie		$\begin{cases} e_1 = m e_2 \\ f_1 = \frac{1}{m} f_2 \end{cases}$	Transformateur électrique, réducteur, bras de levier
Gyrateur sans dissipation d'énergie		$\begin{cases} e_1 = r f_2 \\ f_1 = \frac{1}{r} e_2 \end{cases}$	Générateur de courant alternatif, gyroscope
0-jonction		$\begin{cases} e_1 = e_2 = e_3 \\ f_1 + f_2 + f_3 = 0 \end{cases}$	Loi des nœuds, contrainte cinématique
1-jonction		$\begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 = 0 \\ f_1 = f_2 = f_3 \end{cases}$	Loi de Newton, loi des mailles

Après avoir tracé le BG non causal à l'aide d'un logiciel (ici MS1), il est possible d'exploiter les courbes de résultats de manière classique. Le graphique de la figure 12 donne ainsi les vitesses ω (% F3), ω (% F2) et ω (% F1) de notre exemple pour une impulsion de 24 volts sur le moteur à courant continu pendant une durée de 0,5 seconde.

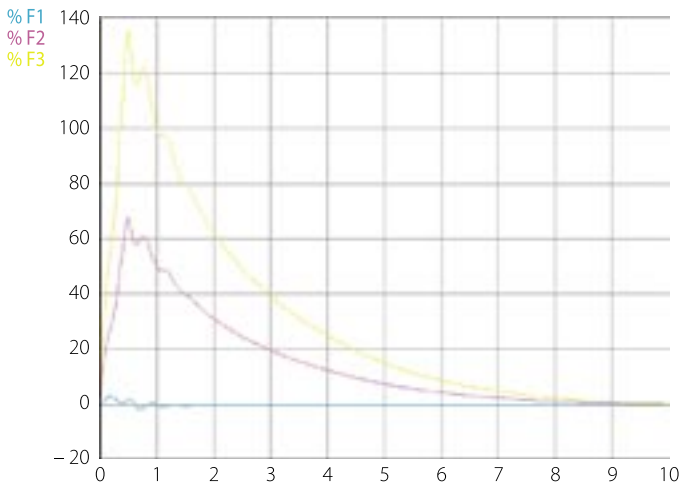


Figure 12. ▲ Les vitesses des arbres de l'exemple traité

UN EXEMPLE HYDRAULIQUE NON DÉVELOPPÉ

De l'eau arrive dans un premier réservoir de section A_1 avec un débit volumique q_i (figure 13). La hauteur dans ce réservoir est notée h_1 . À la sortie de ce réservoir, un robinet (de résistance hydraulique R_1) laisse passer le fluide avec un débit q_1 dans un second réservoir de section A_2 . La hauteur dans ce dernier est notée h_2 . Enfin, le débit volumique de sortie de ce réservoir autorisé par un robinet de résistance hydraulique R_2 vaut q_2 .

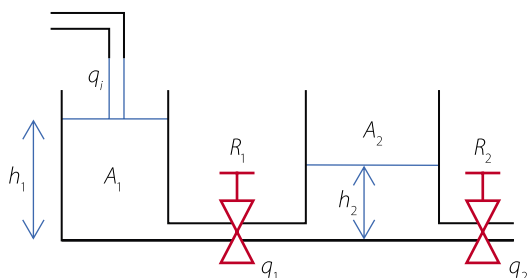


Figure 13. ▲ Les deux bacs

Notons que les pressions (efforts BG) sont mesurées en hauteur d'eau, et que la résistance hydraulique est donnée par

$$q = \frac{\Delta h}{R} \text{ (figure 14).}$$

On prendra les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \text{ m}^2 & R_1 &= 10 \text{ m}(\text{m}^2\text{s}^{-1})^{-1} \\ A_2 &= 2 \text{ m}^2 & R_2 &= 20 \text{ m}(\text{m}^2\text{s}^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

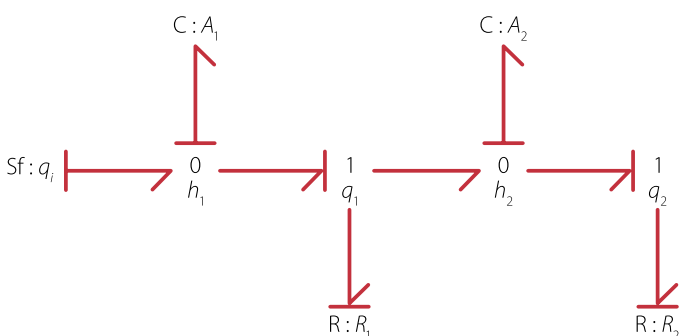


Figure 14. ▲ Le bond graph de l'exemple hydraulique

Le débit à l'entrée sera un échelon de $0,1 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$. On reconnaît sur les graphes de la figure 15 les réponses respectives du premier et du second ordre apériodique des hauteurs et des débits de chaque réservoir.

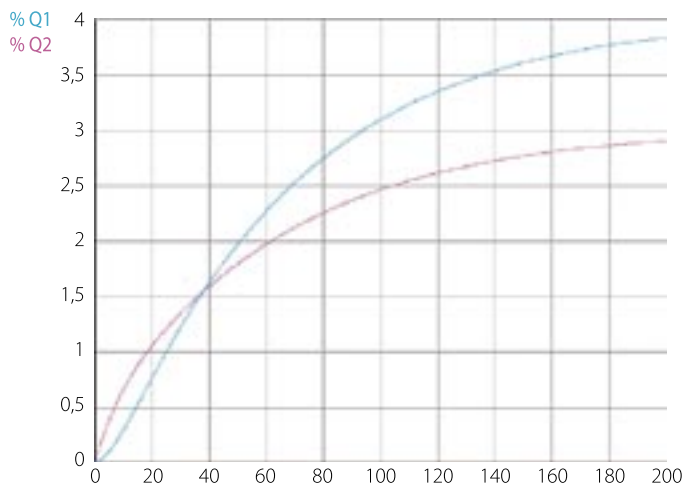


Figure 15a. ▲ Les résultats de l'exemple hydraulique : hauteurs

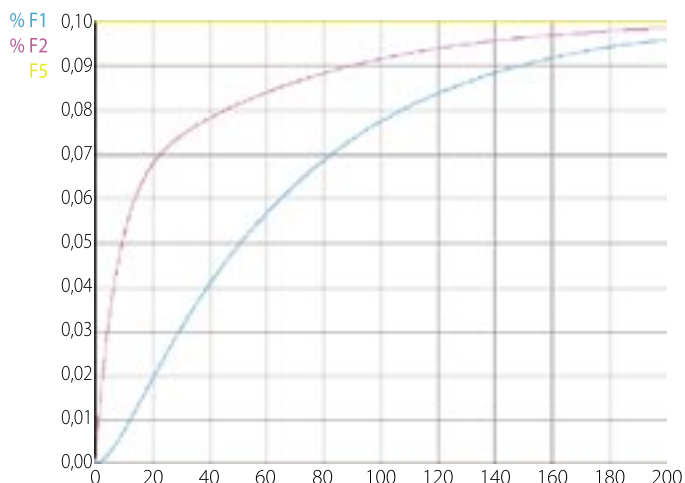


Figure 15b. ▲ Les résultats de l'exemple hydraulique : débits

UN EXEMPLE INDUSTRIEL

Ce modèle est extrait (avec l'aimable autorisation des auteurs) de l'ouvrage récent de Michel Vergé et Daniel Jaume *Modélisation structurée des systèmes avec les bond graphs* (figure 16). Ce livre est une très bonne introduction aux BG et contient de nombreux exemples traités. Le présent modèle est une machine d'enroulement et de déroulement d'un film cinématographique (figure 17).



Figure 16. ▲

On propose une représentation technologique du système à la figure 18. Toutes les variables et tous les paramètres y sont indiqués. Il est possible de faire plusieurs modèles BG de ce système suivant le niveau de détails souhaité. Le premier modèle, dénommé M11, prend en compte toutes les variables citées ; il est donné en figure 19. Le second modèle simplifié est fondé sur l'analyse des modes dominants (on néglige les inerties des trois poulies par rapport à celles des deux bobines), et sur l'élasticité faible du film ; on obtient alors le modèle M3

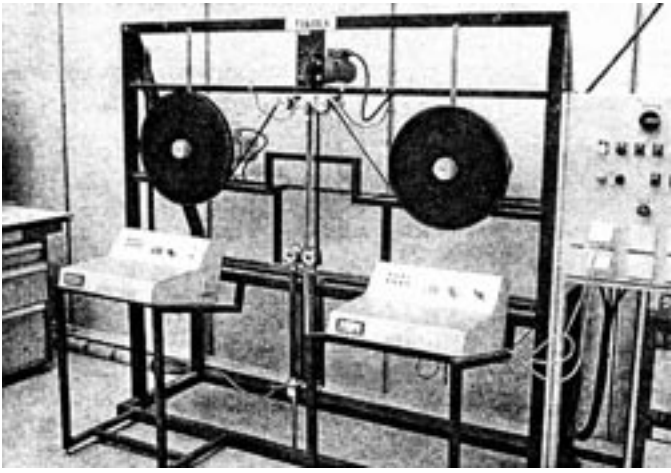


Figure 17. ▲ La machine d'enroulement et de déroulement de films

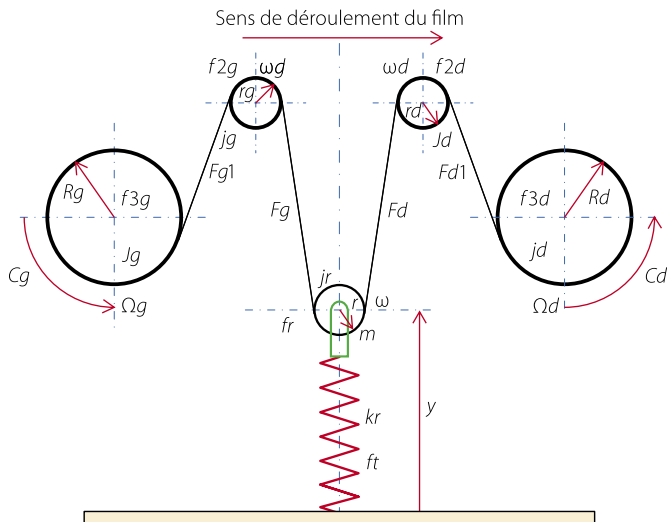


Figure 18. ▲ Le schéma technologique de la machine d'enroulement et de déroulement de films

(figure 20). À partir de ces deux modèles, on peut obtenir les équations du système et réaliser des simulations. On vérifie en fonction des valeurs numériques (voir l'ouvrage cité) que M11 et M3 donnent des résultats similaires. Le temps de simulation est fortement réduit pour M3. La figure 21 propose les évolutions des taux de rotation des poulies de gauche et de droite ainsi que le déplacement de la poulie centrale. On vérifie que pendant 0,5 seconde, ω_g est négatif sous l'effet du couple résistant de la bobine de gauche.

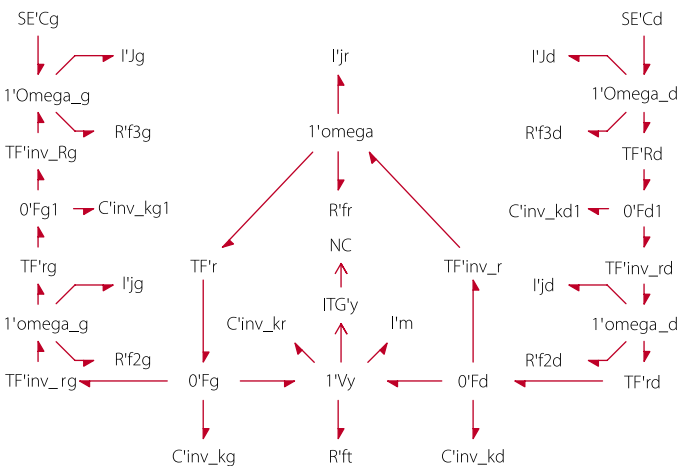


Figure 19. ▲ Le modèle BG M11

Bibliographie

- DAUPHIN-TANGUY (G.), *Les bond graphs* (traité IC2, série systèmes automatisés), Lavoisier, 2000
- DAUPHIN-TANGUY (G.), « *Les bond graphs et leur application en mécatronique* », traité Informatique industrielle, éd. Techniques de l'ingénieur, réf. S 7 222, 1999
- VERGÉ (M.) et JAUME (D.), *Modélisation structurée avec les bond graphs*, éd. Technip, 2003
- FAVRE (W.), *Contribution à la représentation bond graph des systèmes mécaniques multicorps*, thèse de l'Insa de Lyon, 1997
- EDIBE (B.), *Modélisation et simulation de systèmes dynamiques par les bond graphs – Application aux systèmes mécaniques polyarticulés*, thèse de l'université de Rennes-I, juin 1995
- KARNOPP (D.C.) et ROSENBERG (R.C.), *System Dynamics: a Unified Approach*, John Wiley & Sons, 1975
- BARRE (P.-J.), CARON (J.-P.), HAUTIER (J.-P.) et LEGRAND (M.), *Systèmes automatisés* (trois tomes), éd. Ellipses, 1997
- CARON (J.-P.), DEGOBERT (P.), GUILLAUD (X.) et HAUTIER (J.-P.), « *Le graphe informationnel causal* », *Technologie et Formation*, n° 90
- Documents issus du séminaire PT, École centrale de Lille, 11 et 12 mai 2004

Sites internet

- Le site de l'équipe bond graphs de Lille: www.ec-lille.fr/bg/
- Le site américain du bond graph: www.bondgraph.com
- Le site d'un logiciel de simulation permettant le tracé des bond graphs: www.20sim.com/
- Le site du logiciel MS1, avec une bonne version de démonstration limitée à 100 variables: www.lorsim.be/fra/index.html

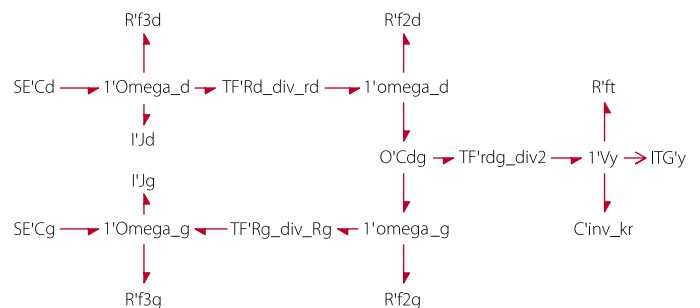


Figure 20. ▲ Le modèle BG M3

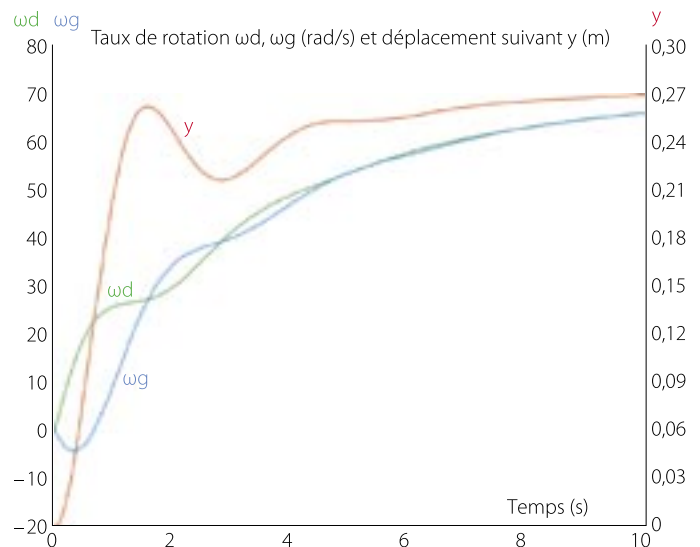


Figure 21. ▲ Les résultats d'une simulation de M11

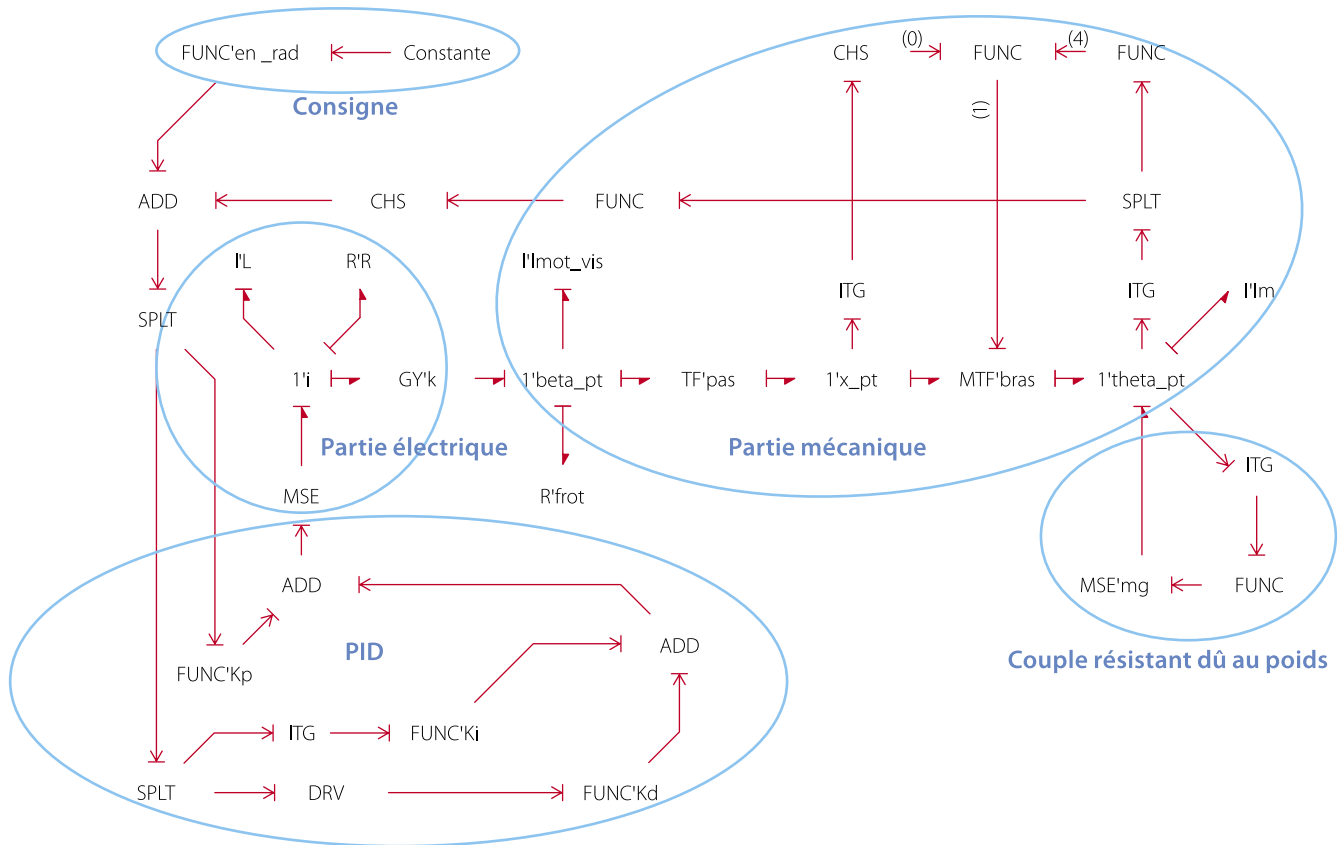


Figure 22. ▲ Le bond graph du robot Maxpid

UN TP DE SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR: ROBOT MAXPID EN BG

Je donne, pour terminer cet article, une modélisation BG du robot 1 axe Maxpid utilisé en classes préparatoires (figures 22 et 23). Celle-ci fait apparaître la chaîne d'énergie (liens BG) et les chaînes d'information (flèches simples). Ce robot ne peut pas être modélisé à l'aide des fonctions de transfert à cause des non-linéarités de tous ordres (saturations, jeux, cinématique non linéaire...): la méthodologie BG est alors bien adaptée pour réaliser des simulations de cette chaîne asservie.

EN CONCLUSION

Bien entendu, ce bref exposé ne donne qu'une petite idée de la méthode BG, qui permet bien plus que ce qui a été présenté ici. On peut généraliser ces résultats monodimensionnels à des dimensions n par le *multibond graph*, on peut traiter des sous-systèmes avec les *word bond graphs* (bond graphs à mots)...

Outre la possibilité de dérivation des modèles mathématiques courants de l'automatique (schémas blocs, équations d'état, fonctions ou matrices de transfert...), la disponibilité simultanée de toute cette information permet:

- l'analyse directe sur le BG des propriétés clés du système (stabilité interne, commandabilité, observabilité, détermination des sensibilités);
- la synthèse directe sur le BG de lois de commande tout en profitant de l'information énergétique, structurelle et causale contenue, ce qui permet l'intégration des outils de l'automatique avancée et de la théorie des graphes.



Figure 23. ▲ La maquette numérique (sous SolidWorks) du bras Maxpid

L'ensemble des propriétés et techniques disponibles sur les BG habilite alors leur utilisation comme un outil efficace pour l'exécution de la multiplicité des tâches liées à la conception d'un système de commande, depuis la définition précise du cahier des charges jusqu'à la mise en œuvre sur prototype.

De très nombreuses recherches ont été réalisées ou sont en cours dans les approches multidisciplinaires associant universitaires et industriels. La démarche bond graph semble devenir un standard international dans le domaine de la «conception intégrée», qui permet aux industriels de raccourcir les délais de conception et d'études et d'être ainsi plus rapide que la concurrence. Gageons que nos étudiants auront à utiliser cette démarche dans leurs futurs métiers... ■