

Eléments de mécanique et de thermodynamique des milieux continus

Jean Lemaitre

Jean-Louis Chaboche

Ahmed Benallal

Rodrigue Desmorat

Table des matières

1	Eléments de mécanique des milieux continus	2
1.1	Système de référence et dérivée particulaire [♣]	2
1.2	Principe des puissances virtuelles [♣]	3
1.2.1	Théorie du premier gradient – Taux de déformation	4
1.2.2	Puissance virtuelle des efforts intérieurs – Contrainte	5
1.2.3	Puissance virtuelle des efforts extérieurs	6
1.2.4	Puissance virtuelle des quantités d'accélération	7
1.3	Equations d'équilibre [♣]	7
1.4	Déformations et déplacements [♣]	8
1.4.1	Hypothèse des transformations infinitésimales – Petites perturbations	8
1.4.2	Grandes transformations ^{♣♣}	10
1.5	Invariants – Représentations tensorielles ^{♣♣}	17
2	Enoncés fondamentaux de la thermodynamique	20
2.1	Lois de conservation [♣]	20
2.1.1	Conservation de la quantité de mouvement	20
2.1.2	Principe de conservation de la masse	20
2.1.3	Premier principe	20
2.1.4	Forme générique des lois de conservation	22
2.2	Entropie – Second principe [♣]	22
2.3	Couplage avec d'autres phénomènes de transfert ^{♣♣}	24
3	Méthode de l'état local	25
3.1	Variables d'état [♣]	25
3.1.1	Variables observables	25
3.1.2	Variables internes	26
3.2	Potentiel thermodynamique – Lois d'état [♣]	27
3.2.1	Energie libre de Helmholtz	27
3.2.2	Cas de l'élasto-(visco-)plasticité en petites perturbations	29
3.2.3	Cas de l'(hyper-)élasto-(visco-)plasticité en grandes transformations	30

3.2.4	Cas des transferts d'espèces	30
3.3	Dissipation – Lois d'évolution ^{♣♣}	31
3.3.1	Dissipation intrinsèque, dissipation thermique	31
3.3.2	Potentiel de dissipation – Lois d'évolution	31
3.3.3	Relations de symétrie d'Onsager	34
3.3.4	Découplage des dissipations intrinsèque et thermique	34
3.3.5	Potentiel d'évolution pour les phénomènes dissipatifs instantanés	35
4	Eléments de thermique	36
4.1	Loi de Fourier [♣]	36
4.2	Equation de la chaleur ^{♣♣}	37
4.3	Propagation classique de la chaleur [♣]	38
4.4	Echauffement adiabatique des métaux ^{♣♣}	39
4.5	Premier principe et équation de la chaleur en grandes transformations ^{♣♣♣}	39
5	Bibliographie	40

*"A chaque phénomène sa variable
A chaque variable sa loi d'évolution"*

La référence "Mécanique des Matériaux Solides" (cf fin de document) est dénommée MMS.

Introduction

Pour modéliser les phénomènes physiques de déformation et de rupture brièvement décrits au chapitre 1 de MMS, il faut une méthode fondée sur des principes généraux gouvernant les variables représentatives de l'état du milieu matériel. C'est l'objet du présent chapitre qui rassemble sous une forme condensée tous les concepts de base qui seront utilisés par la suite. Deux types de modélisation sont nécessaires : l'une que l'on peut qualifier de cinématique ou de mécanique schématise les mouvements et les efforts dans le milieu, l'autre que l'on peut qualifier de phénoménologique ou de physique introduit les variables caractéristiques des phénomènes étudiés et des mécanismes physiques pris en compte dans la modélisation.

La présentation qui en est donnée ici résulte des travaux de l'école française de mécanique concrétisés par P. Germain puis J. Lemaitre dans un cours de 3e cycle et dans les ouvrages "Cours de mécanique des milieux continus" et "Mécanique des milieux continus" cités dans la bibliographie de ce chapitre et qui contiennent tous les détails nécessaires à une compréhension en profondeur. Ici, on se limite aux résultats essentiels en négligeant de nombreux développements mathématiques. Les ouvrages cités en référence aideront les lecteurs désireux d'approfondir la question.

La schématisation mécanique présentée repose sur le principe des puissances virtuelles (Germain, 1972). L'idée de base figurait déjà dans les travaux de d'Alembert vers 1750 mais c'est le développement des méthodes variationnelles (Duvaut, Lions) qui a surtout contribué à son utilisation systématique, notamment pour l'établissement de schémas de résolution numérique. Le choix d'un mouvement virtuel particulier pour un milieu donné conduit naturellement à une définition cohérente des déformations et des contraintes et aux équations d'équilibre avec les conditions aux limites correspondantes.

L'état d'un milieu matériel dépend en général de toute l'histoire de ses variables mécaniques et son comportement peut se modéliser par des lois héréditaires ou intégrales. Pour obtenir un formalisme directement appréhendable par les méthodes de l'analyse fonctionnelle et de l'analyse numérique, nous préférons utiliser l'approche de la thermodynamique des processus irréversibles par variables d'état, initiée par les chimistes et appliquée à la mécanique par Eckart, Biot vers 1950. Le potentiel d'état permet de définir les variables associées ou forces thermodynamiques à partir des variables observables et des variables internes choisies en fonction des phénomènes à modéliser et conduit naturellement aux lois d'évolution des variables décrivant les processus irréversibles selon le

formalisme de Moreau (1970).

Notons toutefois que la thermodynamique élémentaire présentée ici sera souvent utilisée "sans thermique ni véritable dynamique" pour bon nombre de phénomènes étudiés (comportement isotherme quasistatique des matériaux par exemple). Mais son cadre sera très précieux pour guider les choix possibles de la modélisation phénoménologique, notamment en 3D et lors de la considération de chargements anisothermes.

1 Éléments de mécanique des milieux continus

1.1 Système de référence et dérivée particulaire[♣]

Les mouvements des milieux continus peuvent être décrits soit en variables d'Euler, soit en variables de Lagrange.

- Les variables d'Euler sont le temps t et les coordonnées (x_1, x_2, x_3) de la position du point matériel M du milieu à l'instant t : il s'agit d'un repérage dans la configuration actuelle (dite déformée pour les solides). La vitesse du point s'exprime par :

$$\vec{v} = \vec{v}(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

- La description lagrangienne utilise le temps et les coordonnées $(X_1 = x_1^0, X_2 = x_2^0, X_3 = x_3^0)$ de la position initiale M_0 du point M : le repérage est fait par rapport à la configuration initiale (configuration de référence ou non déformée) et la vitesse s'exprime par :

$$\vec{v} = \vec{v}(t, X_1, X_2, X_3)$$

La notion de dérivée particulaire s'applique à toute quantité définie à partir d'un ensemble que l'on suit dans son mouvement.

- En variables de Lagrange, la dérivée particulaire est identique à la dérivée partielle par rapport au temps. Par exemple l'accélération du point M s'exprime par :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad \text{car} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{0}$$

- Au contraire, en variables d'Euler il n'y a pas identité puisque les coordonnées actuelles de M dépendent du temps. On a alors :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \vec{v} \cdot \vec{v}$$

(le terme $\mathbf{grad} \vec{v} \cdot \vec{v}$ est appelé terme de convection) soit encore en notations indicielles pour lesquelles on utilisera la convention de sommation d'Einstein $v_{i,j}v_j = v_{i,1}v_1 + v_{i,2}v_2 + v_{i,3}v_3$, la virgule désignant la dérivée partielle par rapport à x_j :

$$\gamma_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j}v_j$$

La dérivée particulière de l'intégrale d'une fonction f sur un domaine \mathcal{D}_0 fixe (variables de Lagrange) ou \mathcal{D} déformé (variables d'Euler) se calcule ainsi, en posant $\dot{f} = \frac{df}{dt}$,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_0} f \, dV = \int_{\mathcal{D}_0} \dot{f} \, dV \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} f \, dV = \int_{\mathcal{D}} (\dot{f} + f \operatorname{div} \vec{v}) \, dV$$

1.2 Principe des puissances virtuelles[♣]

Pour schématiser les efforts mis en jeu dans les phénomènes que l'on souhaite étudier, il est commode d'imaginer des mouvements fictifs ou virtuels qui correspondent à ces phénomènes et d'analyser le travail ou la puissance qui en résulte.

Exemples de mouvements virtuels

- Pour analyser les forces de gravité agissant sur une valise ou sur une automobile on peut imaginer de la soulever (mouvement virtuel de bas en haut).
- Pour analyser les efforts de frottement de dérapage de l'automobile sur la route, on peut imaginer de la tirer "tous freins serrés" (mouvement horizontal).
- Pour analyser la rigidité de la suspension on peut imaginer de déplacer l'habitacle par rapport aux roues (mouvement virtuel relatif d'un point par rapport à un autre).

Plus généralement un mouvement virtuel d'un milieu matériel repéré dans un référentiel est défini par un champ de vecteur vitesses $\vec{v}(M)$ dépendant du point (M). C'est par le choix de \vec{v} que l'on peut schématiser plus ou moins finement les phénomènes mécaniques et aboutir à des milieux continus 3D, 2D (plaques, coques, membranes) ou 1D (poutres, milieux filaires).

La puissance virtuelle d'un système d'efforts dans un mouvement virtuel donné est une forme linéaire continue (fonction linéaire à valeur scalaire) de $\vec{v}(M)$

$$\hat{P} = \hat{P}(\vec{v}(M))$$

qui représente le travail par unité de temps mis en jeu par le ou les phénomènes considérés dans le mouvement donné.

Un milieu matériel étant isolé, on peut distinguer les actions extérieures qui agissent sur le milieu des actions intérieures qui représentent les liaisons existant entre toutes les parties possibles du milieu.

Axiome d'objectivité

L'objectivité traduit l'indépendance au repère ou référentiel choisi. La puissance virtuelle des efforts intérieurs associée à tout mouvement rigidifiant (mouvement conférant au solide un mouvement de corps rigide) doit ainsi être nulle.

Axiome de l'équilibre (statique ou dynamique)

Pour un milieu matériel repéré dans un référentiel absolu, à chaque instant et pour tout mouvement virtuel, la puissance virtuelle des quantités d'accélération, notée \hat{P}_a , est

la somme des puissances virtuelles des efforts intérieurs \hat{P}_{int} et des efforts extérieurs \hat{P}_{ext} ,

$$\boxed{\hat{P}_{int} + \hat{P}_{ext} = \hat{P}_a}$$

C'est le principe des puissances virtuelles (Germain 1972). L'application de ce principe à un domaine isolé pour un mouvement virtuel particulier et un choix de formes linéaires intervenant dans les puissances conduisent directement aux équations de la mécanique des milieux continus.

1.2.1 Théorie du premier gradient – Taux de déformation

Soit un domaine \mathcal{D} de frontière $\partial\mathcal{D}$, intérieur à un solide \mathcal{S} de frontière $\partial\mathcal{S}$ (Fig. 1), et soit \vec{n} la normale extérieure en un point M de $\partial\mathcal{D}$ repérée dans un repère orthonormé (O, x_1, x_2, x_3) .

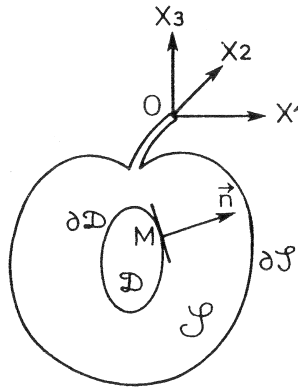


Figure 1: Milieu matériel isolé

Le premier choix consiste à définir l'espace des vitesses virtuelles. Ici un simple champ de vecteurs vitesse de déplacement $\vec{v}(M)$ suffit dans la mesure où l'on ne cherche pas à rendre compte des microrotations (milieux micropolaires ou de Cosserat exclus) et dans la mesure où l'on ne considère pas de milieux 2D ou 1D (poutres, plaques et coques exclues).

Le second choix concerne les termes à faire intervenir dans les puissances. Un seul terme en $\vec{v}(M)$ est insuffisant pour décrire le comportement des corps présentant une certaine souplesse. L'idée la plus simple consiste à lui adjoindre le champ des gradients de vitesse **grad** \vec{v} ou $\hat{v}_{i,j}$. Pour la théorie du premier gradient, le mouvement virtuel est ainsi représenté par :

$$\vec{v}(M) \quad \text{et} \quad \mathbf{grad} \vec{v}$$

En décomposant **grad** \vec{v} en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique on fait apparaître le tenseur (du second ordre) des taux de déformation $\hat{\mathbf{d}}$ et le tenseur des taux de

rotation $\hat{\mathbf{w}}$ (ici virtuels). Le symbole $(.)^T$ désignant la transposition,

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} \vec{v} &= \hat{\mathbf{d}} + \hat{\mathbf{w}} \\ \hat{\mathbf{d}} &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{grad} \vec{v} + (\mathbf{grad} \vec{v})^T \right] \\ \hat{\mathbf{w}} &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{grad} \vec{v} - (\mathbf{grad} \vec{v})^T \right] \end{aligned}$$

ou $(\mathbf{grad} \vec{v})_{ij} = \hat{v}_{i,j} = d_{ij} + w_{ij}$, $\hat{d}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{v}_{i,j} + \hat{v}_{j,i})$, $\hat{w}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{v}_{i,j} - \hat{v}_{j,i})$.

1.2.2 Puissance virtuelle des efforts intérieurs – Contrainte

On suppose que la puissance virtuelle des efforts intérieurs est définie par l'intégrale sur tout domaine \mathcal{D} d'une densité volumique qui *a priori* contient trois termes en \vec{v} , $\hat{\mathbf{d}}$ et $\hat{\mathbf{w}}$ associés respectivement à un vecteur \vec{f}^* et deux tenseurs du second ordre, $\boldsymbol{\sigma}$ symétrique et $\boldsymbol{\Gamma}$ antisymétrique,

$$\hat{P}_{int} = - \int_{\mathcal{D}} (\vec{f}^* \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{d}} + \boldsymbol{\Gamma} : \hat{\mathbf{w}}) dV$$

Le signe moins respecte les conventions qui seront utilisées par la suite en thermodynamique. Les deux points " : " désignent le produit tensoriel contracté sur deux indices, $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \text{tr}(\mathbf{a} \mathbf{b}^T) = a_{ij} b_{ij}$.

Le premier axiome du principe des puissances virtuelles (objectivité) impose que :

- pour tout mouvement de solide rigide de translation $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\hat{\mathbf{d}} = \vec{0}$, $\hat{\mathbf{w}} = \vec{0}$,
- pour tout mouvement de solide rigide de rotation $\vec{v} = \vec{0}$, $\hat{\mathbf{d}} = \vec{0}$, $\hat{\mathbf{w}} \neq \vec{0}$.

la puissance \hat{P}_{int} est nulle.

Par application du lemme fondamental de la physique des milieux continus : à toute fonction $f(M)$ définie et suffisamment régulière dans \mathcal{D} ,

$$\int_{\mathcal{D}} f(M) dV = 0 \quad \forall \mathcal{D} \text{ dans } \mathcal{S} \quad \implies \quad f(M) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{S},$$

Cela entraîne que $\vec{f}^* \cdot \vec{v} = 0$ et $\boldsymbol{\Gamma} : \hat{\mathbf{w}} = 0$ quels que soient \vec{v} et $\hat{\mathbf{w}}$, d'où $\vec{f}^* = 0$, $\boldsymbol{\Gamma} = 0$ et

$$\hat{P}_{int} = - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{d}} dV$$

On verra que le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ ainsi introduit est le tenseur de Cauchy. L'axiome d'objectivité et le choix du mouvement virtuel en théorie du premier gradient sont équivalentes à l'hypothèse habituellement faite pour introduire le tenseur des contraintes, hypothèse qui consiste à supposer que les efforts intérieurs peuvent être schématisés par une densité surfacique de forces de cohésion \vec{T} qui représente des actions à très courte distance. C'est en développant cette hypothèse que l'on définit un vecteur contrainte $\vec{T}(M, t, \vec{n})$ qui dépend du point considéré M , du temps t , et qui dépend linéairement de la normale \vec{n} à $\partial\mathcal{D}$ en M . Le tenseur des contraintes s'en déduit par :

$$\vec{T}(M, t, \vec{n}) = \boldsymbol{\sigma}(M, t) \cdot \vec{n} \quad \text{ou} \quad T_i = \sigma_{ij} n_j$$

σ est symétrique et les composantes de sa matrice représentative dans le repère (O, x_1, x_2, x_3) sont notées σ_{ij} . Ces composantes sont schématisées sur la figure 2. Sur chaque face, le vecteur contrainte se décompose en une contrainte normale (par exemple σ_{11}) et deux contraintes tangentielles (par exemple σ_{21} et σ_{31}).

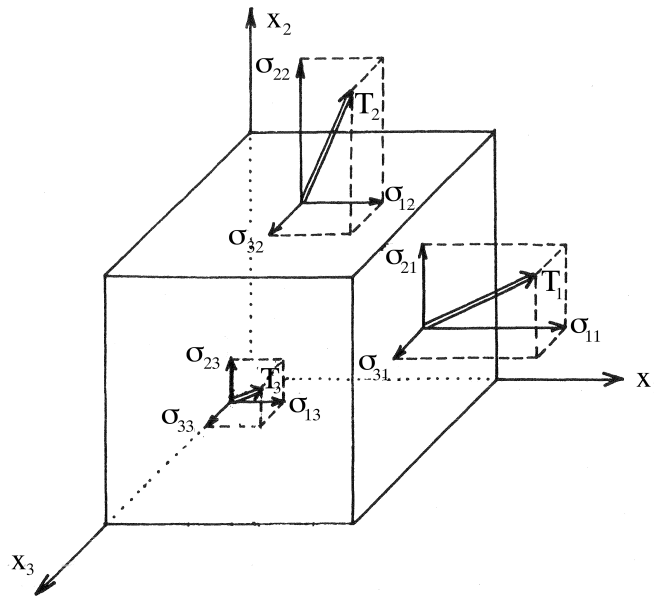


Figure 2: Composantes du vecteur contrainte de la matrice représentative du tenseur des contraintes (d'après Germain-Müller).

La méthode des puissances virtuelles permet de mieux préciser les hypothèses introduites en les faisant porter sur les mouvements virtuels et surtout elle permet de construire aisément d'autres théories fondées sur d'autres hypothèses si nécessaire : introduction d'un champ de rotations dans l'espace des vitesses virtuelles pour les milieux micropolaires ou pour les milieux 2D, introduction du second gradient dans l'expression des puissances virtuelles permettant de décrire plus finement les déformations, mais surtout introduisant une longueur comme paramètre caractéristique du milieu continu pour décrire les effets d'échelle observés dans le comportement des solides et en particulier aux très petites dimensions (chapitres ?? et ?? de MMS).

1.2.3 Puissance virtuelle des efforts extérieurs

Les efforts extérieurs s'exerçant sur \mathcal{D} comprennent :

- des efforts exercés à distance par des systèmes extérieurs à \mathcal{S} , supposés définis par une densité volumique de force \vec{f} (pas de tenseur ni de couple dans la théorie classique),
- des efforts de contact schématisés par une densité surfacique de forces \vec{T} (postulat

de Cauchy),

$$\hat{P}_{ext} = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T} \cdot \vec{v} dS$$

On pourrait ajouter un terme en $\mathbf{grad} \vec{v}$ mais on démontrerait en toute rigueur qu'il est nul.

1.2.4 Puissance virtuelle des quantités d'accélération

Si $\vec{\gamma}$ est le vecteur accélération (réelle) en chaque point M , ρ la masse volumique (les valeurs relatives à quelques matériaux particuliers sont données dans le tableau 4 page 37) et $\rho\vec{\gamma}$ la quantité de mouvement, la puissance virtuelle des quantités d'accélération s'exprime par :

$$\hat{P}_a = \int_{\mathcal{D}} \rho\vec{\gamma} \cdot \vec{v} dV$$

1.3 Equations d'équilibre[♠]

L'application de l'axiome de l'équilibre du principe des puissances virtuelles au domaine \mathcal{D} conduit aux équations d'équilibre :

$$\hat{P}_{int} + \hat{P}_{ext} = \hat{P}_a \quad \forall \vec{v}$$

$$\boxed{- \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{d}} dV + \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T} \cdot \vec{v} dS = \int_{\mathcal{D}} \rho\vec{\gamma} \cdot \vec{v} dV} \quad \forall \vec{v}, \forall \mathcal{D}, \forall t$$

ou

$$- \int_{\mathcal{D}} \sigma_{ij} \hat{d}_{ij} dV + \int_{\mathcal{D}} f_i \hat{v}_i dV + \int_{\partial\mathcal{D}} T_i \hat{v}_i dS = \int_{\mathcal{D}} \rho \gamma_i \hat{v}_i dV \quad \forall \hat{v}_i, \forall \mathcal{D}, \forall t$$

Pour exploiter le fait que cette identité est vérifiée quel que soit le mouvement virtuel \vec{v} , il convient de faire apparaître la vitesse \vec{v} elle-même dans le premier terme par application du théorème de la divergence (ou par intégration par parties)

$$\begin{aligned} - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{d}} dV &= - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{grad} \vec{v} dV \\ &= - \int_{\partial\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{\mathcal{D}} \text{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{v} dV \end{aligned}$$

\vec{n} étant la normale extérieure à la frontière $\partial\mathcal{D}$ du domaine \mathcal{D} . L'équation relative au 2^e axiome s'écrit alors :

$$- \int_{\partial\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{\mathcal{D}} \text{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{v} dV + \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T} \cdot \vec{v} dS = \int_{\mathcal{D}} \rho\vec{\gamma} \cdot \vec{v} dV$$

ou

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} - \rho\vec{\gamma} \right) \cdot \vec{v} dV + \int_{\partial\mathcal{D}} \left(\vec{T} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{v} dS = 0 \quad \forall \vec{v}, \forall \mathcal{D}, \forall t$$

Identité qui, d'après le lemme fondamental, ne peut être vérifiée quel que soit \vec{v} que si

$$\boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} - \rho \vec{\gamma} = \vec{0}} \quad \text{dans } \mathcal{D} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij,j} + f_i - \rho \gamma_i = 0$$

$$\vec{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \partial \mathcal{D} \quad \text{ou} \quad T_i = \sigma_{ij} n_j$$

La première équation sous ses deux formes est l'équation d'équilibre (équilibre statique lorsque $\vec{\gamma} = 0$). La seconde donne un sens de vecteur contrainte à la densité surfacique de forces \vec{T} introduite. Elle montre que $\boldsymbol{\sigma}$ est bien le tenseur des contraintes de Cauchy : tenseur du second ordre symétrique. Elle donne aussi les conditions aux limites en efforts si l'on applique l'axiome de l'équilibre des puissances virtuelles à tout le solide \mathcal{S} considéré.

- Si \vec{F}^d représente la densité surfacique de force appliquée sur une partie $\partial \mathcal{S}_F$ de la frontière du solide \mathcal{S} , le même raisonnement que précédemment conduit à :

$$\boxed{\vec{F}^d = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}} \quad \text{sur } \partial \mathcal{S}_F \quad \text{ou} \quad T_i^d = \sigma_{ij} n_j$$

- La considération de déplacements imposés sur une partie $\partial \mathcal{S}_U$ (indépendante de $\partial \mathcal{S}_F$) de la frontière

$$\boxed{\vec{u} = \vec{u}^d} \quad \text{sur } \partial \mathcal{S}_U \quad \text{ou} \quad u_i = u_i^d$$

est compatible avec le raisonnement précédent si le déplacement et (donc) la vitesse virtuels sont pris nuls sur $\partial \mathcal{S}_U$, définissant ainsi, outre les propriétés de régularité autorisant notamment le calcul du gradient, l'espace des champs virtuels cinématiquement admissibles "à zéro",

$$\mathcal{C}_{ad}^0 = \left\{ \vec{u} \text{ régulier, } \vec{u} = \vec{0} \text{ sur } \partial \mathcal{S}_U \right\}$$

la condition $\forall \vec{v}$ écrite depuis le début devant rigoureusement être remplacée par $\forall \vec{v} \in \mathcal{C}_{ad}^0$.

Enfin, si l'on fait une différence entre descriptions lagrangienne et eulérienne, il faut préciser que les équations d'équilibre et conditions aux limites précédentes sont définies sur la configuration déformée, comme l'est le tenseur des contraintes de Cauchy.

1.4 Déformations et déplacements[♣]

La méthode des puissances virtuelles introduit naturellement des variables cinématiques vitesse de déplacement \vec{v} et taux de déformation \mathbf{d} définies à chaque instant t . Outre cette description du mouvement, l'étude des milieux solides nécessite de caractériser l'état actuel par rapport à une configuration choisie comme référence qui peut être la configuration initiale ou une configuration relâchée lorsque des phénomènes d'élasticité et d'inélasticité sont présents simultanément. Il faut alors introduire le vecteur déplacement et le tenseur des déformations en transformation finie ou en transformation infinitésimale lorsque ces quantités restent petites.

1.4.1 Hypothèse des transformations infinitésimales – Petites perturbations

Dans le cas d'une transformation infinitésimale, on peut confondre les variables d'Euler et les variables de Lagrange, ce qui revient à écrire les conditions aux limites sur la configuration de référence (non déformée). C'est l'hypothèse des petites perturbations : petites déformations, petits déplacements et petites rotations.

Soit donc \vec{u} le vecteur déplacement réel défini par

$$\vec{u} = \int_0^t \vec{v} dt \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\vec{u}}$$

$t = 0$ correspondant à la configuration de référence.

Soit également ϵ le tenseur des petites déformations défini comme la partie symétrique du gradient du déplacement :

$$\epsilon = \frac{1}{2} [\mathbf{grad} \vec{u} + (\mathbf{grad} \vec{u})^T] \quad \text{ou} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

définition similaire à celle déjà rencontrée du tenseur taux de déformation \mathbf{d} :

$$\mathbf{d} = \int_0^t \frac{1}{2} [\mathbf{grad} \vec{v} + (\mathbf{grad} \vec{v})^T] dt \quad \text{ou} \quad d_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$$

L'hypothèse des petites perturbations entraînant l'équivalence des variables d'Euler et des variables de Lagrange, la dérivée particulaire est une dérivée partielle où l'on peut commuter les opérateurs gradient et intégrale par rapport au temps,

$$\int_0^t \mathbf{grad} \vec{v} dt = \mathbf{grad} \left(\int_0^t \vec{v} dt \right) = \mathbf{grad} \vec{u}$$

d'où la relation $\epsilon = \int_0^t \mathbf{d} dt$ et $\dot{\epsilon} = \mathbf{d}$ valable uniquement en petites déformations et petites rotations.

Les équations de la mécanique des milieux continus en petites déformations et petits déplacements se résument donc à :

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} &= \rho \vec{\gamma} \\ \epsilon &= \frac{1}{2} [\mathbf{grad} \vec{u} + (\mathbf{grad} \vec{u})^T] \end{aligned}} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} \sigma_{ij,j} + f_i &= \rho \gamma_i \\ \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned}$$

Pour résoudre un problème il convient d'ajouter :

- les conditions aux limites en général données en déplacement $\vec{u} = \vec{u}^d$ sur $\partial \mathcal{S}_U$ et en contraintes $\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{F}^d$ sur la partie complémentaire $\partial \mathcal{S}_F$;
- les lois de comportement qui traduisent la physique du milieu (celle du chapitre 1 de MMS traduisant les mécanismes de déformation et de rupture) dans des relations entre contrainte et déformation ; leur étude fait l'objet des chapitres 4 à 8 de MMS.

En pratique, l'hypothèse des petites déformations peut être appliquée tant que la norme de la déformation reste petite, de sorte que les termes du second ordre $|\epsilon|^2 \ll |\epsilon|$ sont négligeables, soit

$$|\epsilon| < 2 \text{ à } 5 \cdot 10^{-2}$$

1.4.2 Grandes transformations^{○○○}

Lorsque cette hypothèse ne peut plus être faite il faut introduire de nouvelles notions géométriques de la déformation, décrites en détail dans les ouvrages cités en référence de ce chapitre et qui sont résumées ici.

Soit M repéré par \vec{x} un point du milieu dans sa configuration actuelle \mathcal{C}_t à l'instant t . Il correspond au point $M_0 = M(t=0)$ repéré par $\vec{X} = \vec{x}(t=0)$ en variables de Lagrange par rapport à sa configuration initiale \mathcal{C}_0 à t_0 (Fig. 3),

$$M = M(M_0, t_0, t)$$

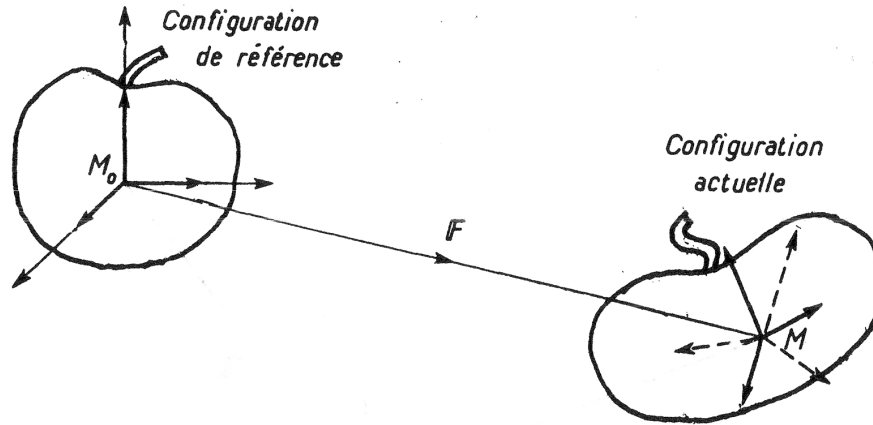


Figure 3: Configuration initiale \mathcal{C}_0 et actuelle \mathcal{C}_t dans une transformation finie.

Soit $\vec{\mathcal{F}}$ la transformation qui permet de passer de M_0 à M pour un vecteur \vec{x} :

$$\vec{x}(M) = \vec{\mathcal{F}}(\vec{X}(M_0), t_0, t)$$

La déformation du milieu peut s'exprimer à partir de la transformation linéaire tangente qui s'exprime au voisinage de M_0 et M

$$d\vec{x}(M) = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}(M_0) \quad \text{soit} \quad d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X} \quad \text{ou} \quad dx_i = F_{ij} dX_j$$

où \mathbf{F} est le tenseur gradient de la transformation $\vec{\mathcal{F}}$,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}}{\partial \vec{X}} \quad \text{ou} \quad F_{ij} = \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial X_j}$$

Les variations de longueur et d'angle entre les éléments $d\vec{X}$ autour de M_0 (de \mathcal{C}_0) et ceux $d\vec{x}$ autour de M (de \mathcal{C}_t) peuvent être analysées en comparant les produits scalaires $d\vec{X}^{(1)} \cdot d\vec{X}^{(2)}$ et $d\vec{x}^{(1)} \cdot d\vec{x}^{(2)}$ de deux vecteurs de chaque configuration reliés par $d\vec{x}^{(1)} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}$ et $d\vec{x}^{(2)} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)}$.

- Si l'on choisit d'exprimer la différence de ces produits scalaires dans la configuration de référence \mathcal{C}_0 , cela conduit à définir le tenseur des déformations de Green-Lagrange \mathbf{E} par

$$\frac{1}{2}(\mathrm{d}\vec{x}^{(1)} \cdot \mathrm{d}\vec{x}^{(2)} - \mathrm{d}\vec{X}^{(1)} \cdot \mathrm{d}\vec{X}^{(2)}) = \mathrm{d}\vec{X}^{(1)T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\vec{X}^{(2)}$$

soit $\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1})}$ ou $E_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ki}F_{kj} - 1)$

La déformation est nulle si $\mathbf{F} = \mathbf{1}$, le tenseur unité du second ordre. Le gradient de la transformation étant par définition relié au gradient lagrangien $\mathbf{grad}_X \vec{u}$ (ou $\frac{\partial u_j}{\partial X_i}$) du déplacement \vec{u} par $\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{grad}_X \vec{u}$ (ou $F_{ij} = 1 + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}$), on en déduit

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right]$$

soit

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{grad}_X \vec{u} + (\mathbf{grad}_X \vec{u})^T + (\mathbf{grad}_X \vec{u})^T \cdot \mathbf{grad}_X \vec{u}]$$

mettant en évidence la non-linéarité de la relation entre le champ de déplacement et le champ de déformation de Green-Lagrange et le fait qu'en petites perturbations $|\frac{\partial u_i}{\partial X_j}| \ll 1 \implies E_{ij} \approx \epsilon_{ij}$ ou $\mathbf{E} \approx \boldsymbol{\epsilon}$ (le tenseur des petites déformations).

- Si l'on choisit d'exprimer $\frac{1}{2}(\mathrm{d}\vec{x}^{(1)} \cdot \mathrm{d}\vec{x}^{(2)} - \mathrm{d}\vec{X}^{(1)} \cdot \mathrm{d}\vec{X}^{(2)})$ dans la configuration déformée \mathcal{C}_t , on est conduit à caractériser la déformation par le tenseur des déformations d'Euler-Almansi $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1})$ où $\mathbf{F}^{-T} = (\mathbf{F}^{-1})^T = (\mathbf{F}^T)^{-1}$.

La décomposition polaire de \mathbf{F} est,

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad \text{si} \quad \begin{cases} \mathbf{U}^2 = \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \\ \mathbf{V}^2 = \mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \end{cases}$$

Elle définit de manière unique le tenseur rotation \mathbf{R} (avec $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$) et où \mathbf{U} et \mathbf{V} sont les tenseurs de déformation pure droit et gauche et \mathbf{C} et \mathbf{B} les tenseurs de Cauchy-Green droit et gauche.

D'autres mesures de déformations peuvent être introduites. On définit de même plusieurs mesures de contraintes qui correspondent à travailler dans une configuration ou une autre (initiale, déformée, intermédiaire...). En réécrivant la puissance des efforts intérieurs $P_{int} = - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, \mathrm{d}V$ (voir tableau 1 page 15), on peut associer à chaque mesure de déformation un tenseur des contraintes,

$$\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} = \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$$

avec la relation suivante (on notera au passage que $\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$),

$$J \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad J = \det \mathbf{F}$$

et où ρ_0 est la masse volumique dans la configuration de référence \mathcal{C}_0 et $\rho = \rho_0/J$ la masse volumique dans la configuration déformée \mathcal{C}_t . Il s'agit :

- du tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ associé au taux de déformation \mathbf{d} si l'on travaille dans la configuration déformée \mathcal{C}_t ,
- du tenseur de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 \boldsymbol{\sigma} / \rho$, égal au tenseur de Cauchy dans le cas incompressible (ce tenseur aura un rôle important en plasticité),
- du second tenseur de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} (défini dans la configuration de référence \mathcal{C}_0) si l'on travaille avec la déformation de Green-Lagrange,
- du premier tenseur de Piola-Kirchhoff $\mathbf{\Pi}$ et du tenseur nominal des contraintes $\mathbf{T} = \mathbf{\Pi}^T$, qui comme \mathbf{F} ne sont pas symétriques, si l'on travaille directement avec le gradient de la transformation \mathbf{F} .

Un volume élémentaire dV_0 de la configuration de référence se transforme en $dV = \det \mathbf{F} dV_0$ dans la configuration déformée. Un vecteur $\vec{N} dS_0$ de \mathcal{C}_0 se transforme en $\vec{n} dS = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \cdot \vec{N} dS_0$ dans \mathcal{C}_t . Le vecteur force élémentaire s'exprime ainsi dans les deux configurations (déformée, facette de normale \vec{n} et de section dS , ou non déformée, facette de normale \vec{N} et de section dS_0), $d\vec{F} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} dS = \mathbf{\Pi} \cdot \vec{N} dS_0$.

Principe d'objectivité – Dérivées objectives

Le principe d'objectivité stipule, chose au plus haut point importante! que la loi de comportement doit être invariante par changement de référentiel d'observation, ce changement étant toute combinaison translation/rotation de la forme

$$\vec{x}' = \vec{c} + \mathbf{Q} \cdot \vec{x}$$

$\vec{c} = \vec{c}(t)$ désigne le vecteur translation et l'opérateur $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$ représente la matrice orthogonale ($\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$) de rotation relative entre deux observateurs, l'un travaillant avec les coordonnées \vec{x} , l'autre avec les coordonnées \vec{x}' d'un même point M .

En d'autres termes, un premier calcul en mécanique des milieux continus effectué dans un premier repère, et un second fait pour la même structure dans un second repère, translaté et tourné par rapport au premier, doivent donner les mêmes résultats!

Ce principe conduit à la nécessité de définir des grandeurs objectives, c'est à dire indépendantes du repère d'observation, grandeurs que l'on reliera entre elles lors de l'écriture des lois de comportement. A ce titre,

- tout scalaire est une grandeur objective,
- tout tenseur écrit dans la configuration de référence \mathcal{C}_0 est objectif (ainsi, le tenseur de déformation de Green-Lagrange \mathbf{E} et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} sont objectifs),
- toute dérivée temporelle d'un tenseur défini dans la configuration de référence \mathcal{C}_0 est objective (ainsi $\dot{\mathbf{E}}$ et $\dot{\mathbf{S}}$ sont objectifs).
- les dérivées temporelles des grandeurs définies dans la configuration courante \mathcal{C}_t ne sont pas objectives (la dérivée $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ du tenseur des contraintes n'est pas objective).
- les dérivées temporelles $\dot{\mathbf{F}}$ du gradient de la transformation et $\dot{\mathbf{\Pi}}$ du premier tenseur de Piola-Kirchhoff ne sont pas objectives.

En ce qui concerne les dérivées par rapport au temps, différentes dérivées objectives ont été proposées, la plus courante étant la dérivée de Jaumann. D'autres dérivées objectives,

telles celles de Truesdell, de Green-Naghdi, de Lie, etc. existent mais elles ne sont pas décrites ici. Pour la dérivée de Jaumann, il s'agit d'effectuer l'opération de dérivation dans un repère tourné lié à la matière ou repère corotationnel : un tenseur \mathbf{q} de rotation (avec $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^T$) est utilisé pour "ramener", avant dérivation donc, la contrainte dans ce repère. La dérivée de Jaumann d'un tenseur (de Cauchy par exemple) est obtenue avec la rotation \mathbf{q} définie par la relation $\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q}^T = \mathbf{w}$, $\mathbf{q}|_{t=0} = \mathbf{w}$,

$$\frac{D_J}{Dt} \boldsymbol{\sigma} = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{q} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{q}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q}^T \quad \boxed{\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w}}$$

$\mathbf{w} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$ est la partie antisymétrique du gradient des vitesses (taux de rotation instantanée).

Décomposition multiplicative

Un aspect important des grandes déformations, concernant l'écriture des lois de comportement élasto-plastiques (ou visco-plastiques), est lié à la séparation de la déformation totale en déformations élastique (réversible) et inélastique (irréversible), auxquelles on peut adjoindre une déformation d'origine purement thermique : la dilatation thermique. La règle de partition utilisée en petites déformations $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p$ (avec e pour élastique et p pour plastique) ou $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^{em} + \boldsymbol{\epsilon}^p + \boldsymbol{\epsilon}^\theta$ si l'on fait apparaître la dilatation thermique (exposants m pour mécanique, θ pour purement thermique) ne se généralise en grandes transformations qu'à travers l'introduction d'une configuration intermédiaire localement relâchée (libre de tout état de contraintes, voir paragraphe ?? du chapitre 6 de MMS). La figure ?? du chapitre 6 de MMS montre alors schématiquement la décomposition de la transformation \mathbf{F} en une transformation inélastique \mathbf{F}^p entre configurations initiale et intermédiaire et une transformation élastique entre cette dernière et l'état actuel : \mathbf{F}^e ,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$$

qui devient $\mathbf{F} = \mathbf{F}^\theta \cdot \mathbf{F}^{em} \cdot \mathbf{F}^p$ si l'on fait apparaître la dilatation thermique \mathbf{F}^θ .

Une déformation élastique peut alors être définie, $\mathbf{E}^e = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{F}^e - \mathbf{1})$ ainsi qu'une déformation plastique $\mathbf{E}^p = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{pT} \cdot \mathbf{F}^p - \mathbf{1})$, indépendante de la déformation élastique, mais on a alors, même dans le cas isotherme $\theta = 0$,

$$\mathbf{E} \neq \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$$

Les définitions des déformations élastique \mathbf{E}^e et plastique \mathbf{E}^p précédentes sont en fait définies sur des configurations différentes. C'est pourquoi elles ne peuvent être additionnées directement sans transport. D'où la relation $\mathbf{E} = \mathbf{F}^{pT} \cdot \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{F}^p + \mathbf{E}^p$.

Décomposition additive

Le taux de déformation défini dans la configuration actuelle par

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} [\mathbf{grad} \vec{v} + (\mathbf{grad} \vec{v})^T]$$

\vec{v} étant la vitesse du point matériel suivi dans son mouvement, peut être décomposé de façon additive (*Attention!* formulation non équivalente en général à la décomposition multiplicative),

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$$

Lagrangien réactualisé

La formulation dite lagrangienne réactualisée consiste à considérer à chaque instant $t+dt$ (à chaque pas de temps lors d'une résolution numérique) la configuration déformée C_t comme configuration de référence. Cette manière de procéder est la plus simple d'un point de vue numérique pour étendre une formulation au cas des grandes transformations : une loi de comportement programmée en petites déformations peut directement être utilisée pour des calculs en grandes déformations. Il suffit au code Éléments Finis de travailler avec les coordonnées des points d'un maillage déformé à l'instant t_n pour calculer l'instant suivant t_{n+1} . De bons résultats sont obtenus en visco-élasticité, en (visco-)plasticité (mise en forme notamment), sans ou avec endommagement, tant que les directions principales des contraintes et tant que la température varient peu.

Bilan sur les grandes transformations

Le tableau 1 montre schématiquement les correspondances qui existent entre les variables et équations, en termes de vitesses dans la configuration actuelle, en termes de petites déformations et en termes de grandes déformations. On remarque la grande similitude entre la première et la deuxième colonne : les quantités de la première sont effectivement les dérivées par rapport au temps de celles de la deuxième. Comme indiqué dans le tableau, le traitement des grandes déformations nécessite souvent l'emploi de tenseurs de contrainte différents du tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ défini dans la configuration actuelle ou déformée. Les équations du mouvement (et de l'équilibre) écrites au paragraphe précédent traitant des petites perturbations restent valables (configuration eulérienne). On peut cependant les remplacer par les équations correspondantes écrites en variables de Lagrange (dérivées prises par rapport aux X_i) faisant intervenir le premier tenseur de Piola-Kirchhoff $\mathbf{\Pi}$: $\text{div}_X \mathbf{\Pi} + \frac{\rho_0}{\rho} \vec{f} = \rho_0 \vec{\gamma}$ ou $\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial X_j} + \frac{\rho_0}{\rho} f_i = \rho_0 \gamma_i$.

Cas uniaxial

Dans le cas unidimensionnel, on utilise souvent la déformation "vraie" ou logarithmique ϵ^v et la contrainte "vraie" σ^v , définies en variables d'Euler sur la configuration actuelle.

Considérons un pavé de dimensions $\ell_1^0 \times \ell_2^0 \times \ell_3^0$ dans la configuration de référence (avec $\ell_2^0 = \ell_3^0$ pour l'exemple), $\ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3$ dans la configuration actuelle. La sollicitation uniaxiale est appliquée suivant la direction 1, le matériau est supposé isotrope de sorte que les grandeurs dans les directions 2 et 3 seront égales ($\ell_2 = \ell_3$). Les sections $S_0 = \ell_2^0 \ell_3^0$ et $S = \ell_2 \ell_3$ sont respectivement la section de l'élément non déformé et la section de l'élément déformé.

Description en vitesse	Description en petites perturbations	Description en transformation finie
<p>Variables d'Euler $M = M(\vec{x}, t)$</p> <p>Configuration actuelle</p> <p>Vitesse \vec{v}</p> <p>Gradient des vitesses grad \vec{v}</p> <p>Tenseur des taux de déformation $\mathbf{d} = \frac{1}{2} [\mathbf{grad} \vec{v} + (\mathbf{grad} \vec{v})^T]$</p> <p>Tenseur des taux de déformations élastique \mathbf{d}^e</p> <p>Tenseur des taux de déformations inélastiques \mathbf{d}^p</p> <p>Partition $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$</p>	<p>Variables d'Euler \equiv Variables de Lagrange</p> <p>Configuration actuelle \equiv Configuration initiale</p> <p>Déplacement \vec{u}</p> <p>Gradient des déplacements grad \vec{u}</p> <p>Tenseur des déformations $\epsilon = \frac{1}{2} [\mathbf{grad} \vec{u} + (\mathbf{grad} \vec{u})^T]$</p> <p>Tenseur des déformations élastiques ϵ^e</p> <p>Tenseur des déformations inélastiques ϵ^p</p> <p>Partition $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$</p>	<p>Variables de Lagrange $M = M(\vec{X}, t_0, t)$</p> <p>Configuration initiale</p> <p>Transformation $\vec{x}(M) = \vec{\mathcal{F}}(\vec{X}(M_0), t_0, t)$</p> <p>Gradient de la transformation linéaire tangente $\mathbf{F} = \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}}{\partial \vec{X}}$</p> <p>Tenseur de Green-Lagrange $\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1})$</p> <p>Transformation élastique par rapport à la configuration relâchée \mathbf{F}^e</p> <p>Transformation inélastique \mathbf{F}^p</p> <p>Décomposition $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$ $\mathbf{E} \neq \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$</p>
	$\dot{\epsilon} = \mathbf{d}, \dot{\epsilon}^e = \mathbf{d}^e, \dot{\epsilon}^p = \mathbf{d}^p$	$\dot{\mathbf{E}} \neq \mathbf{d}, \dot{\mathbf{E}}^e \neq \mathbf{d}^e, \dot{\mathbf{E}}^p \neq \mathbf{d}^p$
<p>Tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$</p> <p>Puissance $-P_{int}$ $\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV$</p>	<p>Tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$</p> <p>Puissance $-P_{int}$ $\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\epsilon} dV = \int_{\mathcal{S}_0} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\epsilon} dV_0$</p>	<p>Tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$</p> <p>Tenseur de Piola-Kirchhoff 1 $\mathbf{\Pi} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$</p> <p>Tenseur de Piola-Kirchhoff 2 $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{\Pi}$</p> <p>Puissance $-P_{int}$ $\int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{F}} dV_0 = \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} dV_0$</p>

Tab. 1: Variables de déformation et de déplacement

La relation $d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$ conduit à

$$\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} \ell_1^0 \\ \ell_2^0 \\ \ell_3^0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 = \lambda_2 \end{bmatrix}$$

définissant ainsi le gradient de la transformation. Les grandeurs $\lambda_i = \ell_i/\ell_i^0 = 1 + \epsilon_i$ (sans sommation) sont les élongations et sont fonction des petites déformations usuelles $\epsilon_i = \Delta\ell_i/\ell_i^0$.

Le tenseur taux de déformation est alors diagonal et :

$$\mathbf{d} = \mathbf{grad} \vec{v} = \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} & & \\ & \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} & \\ & & \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} \end{bmatrix}$$

de sorte que la déformation "vraie" se calcule comme

$$\epsilon_1^v = \int d_{11} dt = \int \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} = \ln \lambda_1 = \ln(1 + \epsilon_1) \quad \text{soit encore} \quad \boxed{\epsilon^v = \ln(1 + \epsilon)}$$

La contrainte "vraie" est la contrainte de Cauchy $\sigma^v = \sigma = F/S = F/\ell_2\ell_3$. On ne peut l'identifier à la contrainte nominale $F/S_0 = \Pi = F/\ell_2^0\ell_3^0$ (qui est la contrainte de Piola-Kirchhoff 1) qu'en petites déformations. Sinon il faut prendre en compte la variation de section (avec $\lambda_1 = e^{\epsilon^v}$ par l'équation précédente et avec $\lambda_2 = \lambda_3$) :

$$S = \ell_2\ell_3 = \lambda_2\ell_2^0\lambda_3\ell_3^0 = S_0\lambda_2^2$$

Dans le cas incompressible (élastomères, plasticité) $J = \det \mathbf{F} = 1$ (ou de manière équivalente $\text{tr} \mathbf{d} = 0$) et $\lambda_2 = \lambda_1^{-1/2}$ de sorte que

$$\sigma^v = \frac{F}{S} = \frac{F}{S_0}\lambda_2^{-2} = \frac{F}{S_0}\lambda_1 = \frac{F}{S_0}e^{\epsilon^v}$$

soit avec $e^{\epsilon^v} = 1 + \epsilon$,

$$\boxed{\sigma^v = \frac{F}{S_0}e^{\epsilon^v} = \frac{F}{S_0}(1 + \epsilon)}$$

Lorsque le coefficient de contraction élastique ou élasto-plastique $\nu^* = -\dot{\epsilon}_2/\dot{\epsilon}_1$ n'est plus égal à $\frac{1}{2}$, on perd la propriété d'incompressibilité. On a alors

$$\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} = -\nu^* \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} \quad \text{soit} \quad \lambda_2 = \lambda_1^{-\nu^*}$$

$$\text{et} \quad \boxed{\sigma^v = \frac{F}{S_0}e^{2\nu^*\epsilon^v} = \frac{F}{S_0}(1 + \epsilon)^{2\nu^*}}$$

En première approximation, en élasto-(visco-)plasticité on confond ν^* avec $\frac{1}{2}$.

1.5 Invariants – Représentations tensorielles^{☞☞}

Dans l'écriture tensorielle des lois de comportement, l'hypothèse d'isotropie conduit à utiliser les invariants des tenseurs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, des déformations $\boldsymbol{\epsilon}$, de leurs déviateurs $\boldsymbol{\sigma}'$ et $\boldsymbol{\epsilon}'$ définis par :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}' &= \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{1} \quad \text{ou} \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \\ \boldsymbol{\epsilon}' &= \boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{1} \quad \text{ou} \quad \epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij}\end{aligned}$$

Ces tenseurs du second ordre possèdent trois invariants élémentaires définis par trois fonctions à valeurs scalaires indépendantes. Mathématiquement, on définit les trois invariants du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ comme les coefficients de l'équation caractéristique définissant les contraintes principales $x = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - x \mathbf{1}) = 0 = -x^3 + I_1(\boldsymbol{\sigma}) x^2 - I_2(\boldsymbol{\sigma}) x + I_3(\boldsymbol{\sigma})$$

c'est-à-dire les quantités scalaires :

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{I}} &= I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ \Sigma_{\text{II}} &= I_2(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} ((\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma})^2 - \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}^2) = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}^2 - \sigma_{ij} \sigma_{ij}) \\ &= \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22} \sigma_{33} + \sigma_{33} \sigma_{11} - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 - \sigma_{12}^2 \\ \Sigma_{\text{III}} &= I_3(\boldsymbol{\sigma}) = \det \boldsymbol{\sigma}\end{aligned}$$

En pratique nous utiliserons plutôt les invariants suivants :

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{I}} &= \Sigma_{\text{I}} = \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \\ \sigma_{\text{II}} &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \\ \sigma_{\text{III}} &= \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}^3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki}\end{aligned}$$

De la même manière, on peut définir les invariants du tenseur des déformations :

$$\begin{aligned}\epsilon_{\text{I}} &= \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \\ \epsilon_{\text{II}} &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \\ \epsilon_{\text{III}} &= \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon}^3 = \frac{1}{3} \epsilon_{ij} \epsilon_{jk} \epsilon_{ki}\end{aligned}$$

ou les invariants du gradient de la transformation \mathbf{F} ou du tenseur (positif) de dilatation $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ utilisés pour la modélisation des grandes déformations (hyperélasticité par exemple). On posera ainsi (les λ_i , composantes de \mathbf{F} , sont les élongations dans le repère

principal) :

$$I_1(\mathbf{C}) = \text{tr } \mathbf{C} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} ((\text{tr } \mathbf{C})^2 - \text{tr } \mathbf{C}^2) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2$$

$$I_3(\mathbf{C}) = \det \mathbf{C} = J^2$$

$$J = \det \mathbf{F} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

$$I'_\alpha(\mathbf{C}) = \frac{1}{\alpha} \text{tr } \mathbf{C}^\alpha = \frac{1}{\alpha} (\lambda_1^{2\alpha} + \lambda_2^{2\alpha} + \lambda_3^{2\alpha})$$

En plasticité (ou en visco-plasticité), on fait souvent intervenir les invariants des déviateurs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}'$ et des déformations plastiques $\boldsymbol{\epsilon}^{p'}$, définis de la même façon : $s_{\text{II}}, s_{\text{III}}, e_{p\text{II}}, e_{p\text{III}}$ (on a $s_{\text{I}} = \text{tr } \boldsymbol{\sigma}' = 0$, $e_{p\text{I}} = \text{tr } \boldsymbol{\epsilon}^{p'} = 0$). Par commodité d'écriture on sera amené à employer des fonctions de ces invariants qui représentent des grandeurs physiques concrètes. Il est pratique de choisir des invariants homogènes qui s'identifient en traction simple avec la première composante du tenseur. On définit ainsi :

- Pour les contraintes, on utilise souvent les invariants suivants :
 - le premier invariant ou la contrainte hydrostatique σ_H telle que

$$I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{\text{I}} = \text{tr } \boldsymbol{\sigma} = 3\sigma_H$$

- la contrainte équivalente au sens de von Mises,

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3s_{\text{II}}} = \sigma_{eq}$$

- le troisième invariant homogène à une contrainte unidimensionnelle

$$J_3(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{27}{2} s_{\text{III}} \right)^{1/3}$$

- Pour les déformations :
 - les déformations volumique ϵ_{I} et hydrostatique ϵ_H ,

$$I_1(\boldsymbol{\epsilon}) = \epsilon_{\text{I}} = \text{tr } \boldsymbol{\epsilon} = 3\epsilon_H$$

- la déformation inélastique équivalente au sens de von Mises,

$$\sqrt{-\frac{4}{3} I_2(\boldsymbol{\epsilon}^{p'})} = \sqrt{\frac{4}{3} e_{p\text{II}}} = \epsilon_{eq}^p$$

D'autres tenseurs peuvent être définis indépendamment du repère : la partie positive et la partie négative d'un tenseur. Leurs invariants peuvent également être utilisés dans les modèles de comportement.

- Partie positive d'un scalaire x : $\langle x \rangle = \max(0, x)$.

- Partie positive $\langle \mathbf{A} \rangle_+$ d'un tenseur \mathbf{A} ,

$$\langle \mathbf{A} \rangle_+ = \sum_{J=1}^3 \langle A_J \rangle \vec{n}^J \otimes \vec{n}^J \quad \text{ou} \quad (\langle \mathbf{A} \rangle_+)_{ij} = \sum_{J=1}^3 \langle A_J \rangle n_i^J n_j^J$$

où les A_J et \vec{n}^J sont les valeurs et vecteurs propres de \mathbf{A} .

Elle peut également être obtenue en trois étapes,

1. diagonalisation du tenseur : $\mathbf{A}^{\text{diag}} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$ où \mathbf{P} est la matrice usuelle (orthogonale) de passage,
 2. prise de la partie positive des termes diagonaux définissant $\langle \mathbf{A}^{\text{diag}} \rangle_+$,
 3. partie positive dans le repère initial : $\langle \mathbf{A} \rangle_+ = \mathbf{P} \cdot \langle \mathbf{A}^{\text{diag}} \rangle_+ \cdot \mathbf{P}^T$.
- Partie négative d'un tenseur : $\langle \mathbf{A} \rangle_- = \mathbf{A} - \langle \mathbf{A} \rangle_+$.
 - Propriété d'orthogonalité : $\langle \mathbf{A} \rangle_- : \langle \mathbf{A} \rangle_+ = 0$
 - Propriétés de différentiabilité : $\begin{cases} d(\langle \mathbf{A} \rangle_+ : \langle \mathbf{A} \rangle_+) = 2\langle \mathbf{A} \rangle_+ : d\mathbf{A} \\ d(\langle \mathbf{A} \rangle_- : \langle \mathbf{A} \rangle_-) = 2\langle \mathbf{A} \rangle_- : d\mathbf{A} \end{cases}$.

Les invariants ainsi définis sont suffisants pour écrire les lois de comportement des matériaux isotropes. Dans le cas anisotrope on peut également utiliser des arguments tensoriels caractéristiques de l'anisotropie : soit par exemple la fonction \mathbf{f} anisotrope reliant le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ au tenseur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}$ dans le cas d'une anisotropie générale,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma})$$

Si $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ sont les vecteurs de base du repère orthonormé d'une configuration de référence, on peut poser :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

A toute rotation $\mathbf{Q} \cdot \vec{a}_1, \mathbf{Q} \cdot \vec{a}_2, \mathbf{Q} \cdot \vec{a}_3$ du repère, on peut associer les transformations

$$\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{Q}^T$$

ce qui montre que \mathbf{g} est une fonction isotrope pouvant alors s'écrire :

$$\boldsymbol{\epsilon} = C_p \mathbf{G}_p$$

- Les \mathbf{G}_p sont les tenseurs générateurs. Ils sont au nombre de 21 dans le cas général mais s'expriment linéairement en fonction d'un nombre inférieur de générateurs indépendants.
- Les C_p sont des coefficients, fonctions des 21 invariants qui s'expriment eux aussi en fonction d'un nombre inférieur de générateurs indépendants.

2 Enoncés fondamentaux de la thermodynamique

2.1 Lois de conservation[♣]

2.1.1 Conservation de la quantité de mouvement

L'équation d'équilibre $\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} = \rho \vec{\gamma}$ établie au paragraphe précédent peut être interprétée comme une forme de la loi de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{v} dV = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} dV + \int_{\partial \mathcal{D}} \vec{T} dS$$

car on peut l'en déduire par application du théorème de la divergence avec $\vec{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}$ et $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\gamma}$.

De la même façon, la symétrie du tenseur des contraintes $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ qui résulte directement du choix du mouvement virtuel en théorie du premier gradient peut être considérée comme une conséquence de l'équation de conservation du moment cinétique.

2.1.2 Principe de conservation de la masse

La deuxième loi de conservation est la conservation de la masse qui, si l'on considère encore un domaine \mathcal{D} de frontière $\partial \mathcal{D}$ intérieur au milieu matériel \mathcal{S} déformé, s'exprime par :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho dV = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{\rho} + \rho \text{div } \vec{v} = 0}$$

car la dérivée particulière du terme intégral est $\int_{\mathcal{D}} (\dot{\rho} + \rho \text{div } \vec{v}) dV = 0$. L'expression encadrée est la forme locale de la conservation de la masse. Les dérivées particulières d'intégrales de quantités scalaires ou vectorielles $\int_{\mathcal{D}} \rho f dV$ s'écrivent alors,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho f dV = \int_{\mathcal{D}} \rho \dot{f} dV$$

comme par exemple

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{v} dV = \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{\gamma} dV \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} dV = \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{v} \cdot \vec{\gamma} dV$$

2.1.3 Premier principe

Il constitue la troisième grande loi de conservation : la conservation de l'énergie. Considérons toujours le domaine \mathcal{D} de la configuration actuelle :

- soit E son énergie interne, e l'énergie interne spécifique,

$$E = \int_{\mathcal{D}} \rho e dV$$

- soit K son énergie cinétique,

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dV$$

- soit Q le taux de chaleur reçue par le domaine \mathcal{D} . Il comprend deux termes : 1) la chaleur créée dans le volume \mathcal{D} par des actions à distance extérieures à \mathcal{D} (rayonnement, chauffage inductif par exemple) ou plus généralement des sources de chaleur issues de physiques non modélisées (réactions chimiques, effet joule...), et 2) la chaleur reçue par conduction au travers de la frontière $\partial\mathcal{D}$ de \mathcal{D}

$$Q = \int_{\mathcal{D}} r dV - \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{q} \cdot \vec{n} dS$$

r est une source volumique de chaleur,

\vec{q} est le vecteur flux de chaleur,

\vec{n} est la normale extérieure à $\partial\mathcal{D}$.

- soit P_{ext} la puissance réelle des efforts extérieurs :

$$P_{ext} = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T} \cdot \vec{v} dS$$

le premier principe de la thermodynamique s'exprime par :

$$\boxed{\frac{d}{dt}(E + K) = P_{ext} + Q} \quad \forall \mathcal{D}$$

ou

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \left(e + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) dV = \int_{\mathcal{D}} (\vec{f} \cdot \vec{v} + r) dV + \int_{\partial\mathcal{D}} (\vec{T} \cdot \vec{v} - \vec{q} \cdot \vec{n}) dS$$

Il est possible d'en déduire une expression locale ne faisant intervenir que la puissance des efforts intérieurs et la chaleur reçue. Pour cela écrivons le deuxième axiome du principe des puissances virtuelles appliqué ici au mouvement réel étudié,

$$P_{ext} = P_a - P_{int}$$

avec $P_a = \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{v} dV$ et $P_{int} = - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV$ les puissances réelles des quantités d'accélération et des efforts intérieurs. En remarquant que

$$P_a = \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{v} dV = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dV = \frac{dK}{dt}$$

il vient

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dt} - P_{int} + Q$$

On a $Q = \int_{\mathcal{D}} r dV - \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{q} \cdot \vec{n} dS = \int_{\mathcal{D}} (r - \text{div } \vec{q}) dV$ en utilisant le théorème de la divergence, et avec l'expression de P_{int} ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho e dV = \int_{\mathcal{D}} \rho \dot{e} dV = \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV + \int_{\mathcal{D}} (r - \text{div } \vec{q}) dV$$

Cette identité est vérifiée quel que soit le domaine \mathcal{D} . D'après le lemme fondamental elle implique :

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \operatorname{div} \vec{q}$$

soit, dans l'hypothèse des petites perturbations ($\rho = \rho_0$) :

$$\boxed{\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + r - \operatorname{div} \vec{q}} \quad \text{ou} \quad \rho \dot{e} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + r - q_{i,i}$$

2.1.4 Forme générique des lois de conservation

Les lois de conservation peuvent être écrites sous une forme générique. En effet, s'intéresser à la conservation d'une quantité $X = \int_{\mathcal{D}} \rho x \, dV$, intégrale de la grandeur spécifique (massique) x sur un domaine \mathcal{D} , conduira à :

$$\frac{dX}{dt} = \int_{\mathcal{D}} \rho \dot{x} \, dV$$

et *in fine* à

$$\boxed{\rho \dot{x} = r_x - \operatorname{div} \vec{J}_x} \quad \text{ou} \quad \rho \dot{x} = r_x - J_{xj,j}$$

où r_x et \vec{J}_x sont respectivement la source volumique et le vecteur flux (sortant) de la quantité X .

On a dans les cas précédents

- conservation de l'énergie : $X = E + K$, $x = e + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}$, $r_x = \vec{f} \cdot \vec{v} + r$, $\vec{J}_x = \vec{q} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{v}$,
- conservation de l'énergie interne : $X = E$, $x = e$, $r_x = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r$, $\vec{J}_x = \vec{q}$,
- conservation de la quantité de mouvement : $X = \int_{\mathcal{D}} \rho v_i \, dV$, $x = v_i$, $r_x = f_i$, $J_{xj} = -\sigma_{ij}$.

2.2 Entropie – Second principe[♣]

Après l'énergie interne et le taux de chaleur il faut encore introduire deux nouvelles variables, la température et l'entropie.

On suppose qu'il est possible de repérer la température par un champ à valeurs scalaires positives défini à chaque instant et en tout point du domaine \mathcal{D} étudié : $T(M, t)$.

L'entropie exprime une variation d'énergie associée à une variation de température. On la définit pour un domaine \mathcal{D} à partir d'une densité d'entropie spécifique s :

$$S = \int_{\mathcal{D}} \rho s \, dV$$

Le second principe postule que le taux de production d'entropie est toujours supérieur ou égal au taux de chaleur reçue divisé par la température (l'égalité signifiant réversibilité), $\frac{d}{dt}$ désignant toujours la dérivée particulière :

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\mathcal{D}} \frac{r}{T} \, dV - \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} \, dS$$

Soit encore en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\rho \dot{s} + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{r}{T} \right] dV \geq 0$$

Cette inégalité, vérifiée quel que soit le domaine \mathcal{D} , entraîne la forme locale du second principe exprimant un taux positif de production irréversible d'entropie :

$$\dot{s}_i^* = \rho \dot{s} + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{r}{T} \geq 0$$

On a alors la loi de conservation suivante :

$$\rho \dot{s} = r_s - \operatorname{div} \vec{J}_s$$

définissant ainsi la source volumique d'entropie $r_s = \dot{s}_i^* + r/T$ et le flux d'entropie $\vec{J}_s = \vec{q}/T$ dans le cas d'un transfert de chaleur.

L'*inégalité fondamentale* combinant premier et second principe s'obtient en remplaçant $\operatorname{div} \vec{q} - r$ par son expression $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \rho \dot{e}$ tirée de l'équation de conservation de l'énergie, en remarquant que :

$$\operatorname{div} \vec{J}_s = \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{T} = \frac{\operatorname{div} \vec{q}}{T} - \frac{\vec{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T^2}$$

et en multipliant par $T > 0$ on en déduit :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho (T \dot{s} - \dot{e}) - \frac{\vec{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T} \geq 0$$

L'*inégalité de Clausius-Duhem* s'obtient en introduisant une nouvelle grandeur thermodynamique, l'énergie libre spécifique de Helmholtz ψ définie par :

$$\psi = e - Ts$$

Par dérivation par rapport au temps, on exprime le premier terme de l'inégalité fondamentale

$$\dot{\psi} = \dot{e} - T \dot{s} - s \dot{T}$$

et finalement :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \rho (\dot{\psi} + s \dot{T}) - \frac{\vec{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T} \geq 0$$

soit dans l'hypothèse des petites perturbations

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \rho (\dot{\psi} + s \dot{T}) - \frac{\vec{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T} \geq 0} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \rho (\dot{\psi} + s \dot{T}) - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0$$

Un seul type de diffusion est ici présent, la conduction de la chaleur.

2.3 Couplage avec d'autres phénomènes de transfert^{ss}

Lorsque d'autres types de transfert ont lieu, comme le transfert de fluide au sein d'un milieu poreux, comme la diffusion dans un solide d'espèces chimiques à partir de sa frontière avec un milieu agressif (oxydation par exemple), comme le transport d'électrons dans un conducteur (effet Joule), il faut prendre en compte leur contribution aux lois de bilan précédentes.

Une loi de conservation existe pour chaque phénomène de diffusion, formellement écrite sous la forme générique du paragraphe 2.1.4. Par exemple pour un transfert de matière (de constituant ou d'espèce chimique k) de flux $\vec{J}_{\chi_k}^*$ et de chaleur de flux \vec{q} ou plus généralement de flux d'énergie \vec{J}_e , on a :

- la conservation de l'énergie, avec terme source $r_e = r + \sigma : \dot{\epsilon}$,

$$\rho \dot{e} = r_e - \text{div } \vec{J}_e$$

où \vec{J}_e peut être différent du flux de chaleur \vec{q} si le flux d'énergie n'est pas d'origine purement thermique.

- la conservation de la masse, avec terme source r_{χ_k} nul s'il n'y pas de réaction chimique, avec $\sum_k r_{\chi_k} = 0$ sinon (conservation globale de la masse),

$$\rho \dot{\chi}_k = r_{\chi_k} - \text{div } \vec{J}_{\chi_k}^*$$

où χ_k est la fraction massique du constituant k et $\vec{J}_{\chi_k}^*$ le flux d'espèce associé (principalement gouverné par le potentiel chimique et fortement influencé par la température).

La différentielle de l'entropie écrite en termes physiques (P est la pression, V le volume, μ_k le potentiel chimique molaire, n_k le nombre de moles d'un constituant k et M_k sa masse molaire)

$$dS = \frac{1}{T} dE + \frac{P}{T} dV - \frac{1}{T} \sum_k \mu_k dn_k$$

devient ici, si l'on note $\mu_k^* = \mu_k/M_k$ le potentiel chimique massique :

$$\rho ds = \frac{1}{T} \rho de - \frac{\sigma}{T} : d\epsilon - \rho \sum_k \frac{\mu_k^*}{T} d\chi_k$$

Cette différentielle définit $1/T$ comme $\partial s / \partial e$ et $-\mu_k^*/T$ comme $\partial s / \partial \chi_k$.

Le taux de production irréversible d'entropie $\dot{s}_i^* = \rho \dot{s} + \text{div } \vec{J}_s - \frac{r}{T}$ fait intervenir le flux d'entropie défini comme

$$\vec{J}_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial s}{\partial e} \vec{q} + \sum_k \frac{\partial s}{\partial \chi_k} \vec{J}_{\chi_k}^* = \frac{1}{T} \vec{q} - \sum_k \frac{\mu_k^*}{T} \vec{J}_{\chi_k}^*$$

de sorte que :

$$\text{div } \vec{J}_s - \frac{r}{T} = \frac{\text{div } \vec{q} - r}{T} + \vec{q} \cdot \text{grad } \frac{1}{T} - \sum_k \frac{\mu_k^*}{T} \text{div } \vec{J}_{\chi_k}^* + \sum_k \vec{J}_{\chi_k}^* \cdot \text{grad } \left(-\frac{\mu_k^*}{T} \right)$$

Les termes en divergence s'éliminent en utilisant les lois de conservation, conduisant dans le cas $r_{\chi_k} = 0$ sans réaction chimique à

$$\rho(T\dot{s} - \dot{e}) + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \rho \sum_k \mu_k^* \dot{\chi}_k - \frac{\vec{q} \cdot \text{grad} T}{T} + \sum_k T \vec{J}_{\chi_k}^* \cdot \text{grad} \left(-\frac{\mu_k^*}{T} \right) \geq 0$$

et finalement à l'inégalité de Clausius-Duhem prenant en compte les différents phénomènes de transfert,

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \rho \left(\dot{\psi} + s\dot{T} \right) + \rho \sum_k \mu_k^* \dot{\chi}_k - \frac{\vec{q} \cdot \text{grad} T}{T} + \sum_k T \vec{J}_{\chi_k}^* \cdot \text{grad} \left(-\frac{\mu_k^*}{T} \right) \geq 0}$$

3 Méthode de l'état local

Pour éviter la confusion dans l'esprit du lecteur, il est grand temps de dresser un bilan des variables destinées à la description du comportement thermo-mécanique des milieux solides. C'est le potentiel d'état qui va tout clarifier!! Mais avant de le définir, il y a lieu d'opérer un choix dans la nature des variables. Ce choix représente à la fois la faiblesse et la richesse de la méthode thermodynamique phénoménologique : faiblesse, car il est en partie subjectif et conduit à des modèles différents selon l'humeur des auteurs ; richesse, car il permet d'élaborer des théories adaptées à l'étude d'un ou plusieurs phénomènes couplés ou non, et ce, en fonction de l'utilisation qui doit en être faite.

3.1 Variables d'état^o

La méthode de l'état local postule que l'état thermomécanique d'un milieu matériel, en un point et à un instant donnés, est complètement défini par la connaissance à cet instant des valeurs d'un certain nombre de variables ne dépendant que du point considéré. Les dérivées temporelles de ces variables n'intervenant pas pour définir l'état, cette hypothèse implique que toute évolution puisse être considérée comme une succession d'états d'équilibre. On exclut ainsi du champ d'application de cette théorie les phénomènes ultrarapides pour lesquels les échelles de temps des évolutions seraient de l'ordre des temps de relaxation de retour à l'équilibre thermostatique (vibrations atomiques). C'est par le choix de la nature et du nombre des variables d'état que l'on décrit plus ou moins finement les phénomènes physiques. Les processus ainsi définis seront thermodynamiquement admissibles si, à chaque instant de l'évolution, l'inégalité de Clausius-Duhem est satisfaite. Les variables d'état, appelées aussi variables thermodynamiques ou variables indépendantes, sont les variables observables et les variables internes.

3.1.1 Variables observables

Un certain nombre de variables d'état est imposé par le formalisme de la mécanique et de la thermodynamique des milieux continus développé aux paragraphes précédents ; ce sont les variables observables :

- la température T ,
- la déformation totale ($\boldsymbol{\epsilon}$ en petites déformations, \mathbf{E} ou \mathbf{F} en grandes transformations).

On se limite à ces deux variables observables qui sont les seules qui interviendront dans les phénomènes d'élasticité, de visco-élasticité, de plasticité, de visco-plasticité, d'endommagement et de rupture. Ce sont les seules dont les variables associées satisfont à une équation de champ définie sur le domaine dans son ensemble : équation d'équilibre pour la contrainte, premier principe ou, de manière équivalente, équation de la chaleur pour la température.

Pour les phénomènes réversibles (ou élastiques) à chaque instant, l'état dépend uniquement de ces variables observables. Par exemple, la puissance et le travail réversibles, élastiques, sont définis à l'aide de la contrainte associée $\boldsymbol{\sigma}$,

$$\dot{w}_e = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad w_e = \int \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon}$$

3.1.2 Variables internes

Pour les phénomènes dissipatifs, l'état actuel dépend aussi de l'histoire passée, représentée dans la méthode de l'état local par les valeurs à chaque instant d'autres variables appelées variables internes.

La plasticité et la visco-plasticité nécessitent l'introduction de la variable déformation plastique (ou visco-plastique). En petites déformations, la déformation plastique notée $\boldsymbol{\epsilon}^p$ est la déformation permanente associée à la configuration relâchée (on utilisera \mathbf{F}^p en grandes transformations). Elle résulte de la déformation totale par "décharge élastique" conduisant à la partition des déformations

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p$$

Deux variables internes, liées par cette équation de partition, sont ainsi formellement définies : la déformation plastique $\boldsymbol{\epsilon}^p$ et la déformation élastique $\boldsymbol{\epsilon}^e$ (comprenant la dilatation thermique). A cause de cette relation, seule la déformation plastique aura un statut de variable thermodynamique.

Les autres phénomènes tels que l'érouissage, l'endommagement, la rupture nécessitent d'autres variables internes de nature plus "cachée". Elles représentent l'état interne de la matière (densité de dislocations, micro-structure cristalline, configuration de microfissures et cavités...), sans qu'il soit possible de les mesurer par des observations directes. Elles n'interviennent pas non plus directement dans les lois de conservation ni dans le second principe, on les appelle variables internes mais ce sont des variables d'état qui seront traitées comme les variables observables.

Il n'existe pas de méthode objective pour choisir la nature des variables internes les mieux adaptées à tel ou tel phénomène. Là, c'est la connaissance des mécanismes intimes décrits au chapitre 1 de MMS, l'expérience, le sens physique et bien souvent le type d'application envisagée qui guident ce choix. Elles seront précisées au fur et à mesure des

besoins dans les différents chapitres de MMS. Pour leur étude générale nous les désignons par $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_K, \dots$, chaque \mathbf{V}_K pouvant représenter soit une variable scalaire, soit une variable tensorielle, soit parfois une variable vectorielle. A titre d'exemples :

- pour la (visco-)plasticité en petites transformations nous auront $\mathbf{V}_0 = \boldsymbol{\epsilon}^p$, la déformation plastique, et les autres \mathbf{V}_K ($K \geq 1$) représenteront l'érouissage, si besoin l'endommagement,
- pour la (visco-)plasticité en grandes transformations nous pourrions avoir $\mathbf{V}_0 = \mathbf{F}^p$, le gradient plastique, les autres \mathbf{V}_K ($K \geq 1$) représentant l'érouissage, si besoin l'endommagement,
- pour l'endommagement l'un des \mathbf{V}_K sera noté \mathbf{D} , variable de dommage,
- lors de transformations de phases, l'un des V_K sera la fraction volumique de phase,
- lors de couplages avec la chimie, certains V_K pourront être les fractions massiques χ_k des constituants, ou encore l'avancement de la réaction chimique ξ ,
- lors de couplages électro-magnéto-mécaniques, certains \vec{V}_K seront la polarisation électrique \vec{P} et l'aimantation \vec{M} .

3.2 Potentiel thermodynamique – Lois d'état[♠]

Ayant défini les variables d'état, on postule l'existence d'un potentiel thermodynamique duquel dérivent les lois d'état. Sans entrer dans le détail, disons que la donnée d'une fonction à valeur scalaire ψ (ou ψ^*), concave par rapport à T , convexe par rapport à $\boldsymbol{\epsilon}$ (ou $\boldsymbol{\sigma}$), permet de vérifier les conditions de stabilité thermodynamique imposées par les inégalités que l'on peut déduire du second principe. La convexité par rapport aux variables internes n'est pas nécessaire mais, dans ce cas, il faudra garantir la positivité de la dissipation et satisfaire ainsi le second principe. La convexité est seulement suffisante.

3.2.1 Energie libre de Helmholtz

On peut travailler d'une manière équivalente avec différents potentiels. Pour les solides, le potentiel énergie libre spécifique ψ , qui dépend des variables d'état observables et des variables internes, est adapté aux conditions isothermes d'essais mécaniques,

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\epsilon}, T, \mathbf{V}_K) \quad (K \geq 0)$$

On utilise l'inégalité de Clausius-Duhem avec

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{V}_K} \bullet \dot{\mathbf{V}}_K$$

où "•" désigne un simple produit, un produit scalaire ou un produit tensoriel, selon la nature des variables internes. On obtient :

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{V}_K} \bullet \dot{\mathbf{V}}_K - \frac{\vec{q} \cdot \text{grad } T}{T} \geq 0$$

Un raisonnement classique permet d'annuler indépendamment certains termes de cette inégalité. On peut imaginer d'abord une transformation élastique, réversible, à température constante ($\dot{T} = 0$) et uniforme ($\text{grad } T = 0$) qui ne modifie pas les variables internes ($\dot{\mathbf{V}}_K = 0$). Il faut pour cela considérer que les déformations élastiques peuvent se situer à des échelles de temps supérieures à celles qui remettraient en cause l'hypothèse de l'état local et inférieures à celles des phénomènes dissipatifs. L'inégalité de Clausius-Duhem devant être vérifiée quel que soit $\dot{\epsilon}$, cela implique

$$\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = 0$$

Cette égalité étant vérifiée, on peut imaginer une transformation thermique de dilatation homogène, telle que $\dot{\epsilon}^p = 0$, $\dot{\mathbf{V}}_K = 0$, $\text{grad } T = 0$ qui impose à l'inégalité de n'être vérifiée que si :

$$s + \frac{\partial \psi}{\partial T} = 0$$

Ces expressions définissent les lois d'état de la thermo-élasticité :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}}$$

Cela montre que la contrainte est la variable associée à la déformation totale.

Par analogie avec les relations précédentes, on définit les variables associées aux variables internes par :

$$\boxed{\mathbf{A}_K = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{V}_K}}$$

Ces relations constituent les lois d'état.

- L'entropie s et le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ ayant été définis par ailleurs, la donnée du potentiel d'état $\psi(\boldsymbol{\epsilon}, T)$ fournira la théorie de la thermo-élasticité du chapitre 4 de MMS (couplée à d'autres phénomènes si des variables internes sont considérées).
- Les variables \mathbf{A}_K associées aux variables internes, n'ayant pas été introduites, c'est la donnée du potentiel d'état $\psi(\dots, \mathbf{V}_K)$ qui les définit.
- s , $\boldsymbol{\sigma}$, et $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_K \dots$ constituent les variables associées ou forces thermodynamiques. Le vecteur formé par ces variables est le gradient de la fonction ψ dans l'espace des variables $\boldsymbol{\epsilon}, T, \mathbf{V}_K$. Ce vecteur est normal au graphe de la fonction ψ . Les variables associées forment un ensemble de variables normales en dualité avec les variables d'état observables et internes. Le tableau 2 résume l'ensemble des variables ainsi introduites.

Il peut s'avérer utile de travailler avec un potentiel écrit en contraintes plutôt qu'en déformation : l'enthalpie libre spécifique de Gibbs ψ^* . Il se déduit de l'énergie libre par transformation partielle de Legendre, transformation effectuée sur la déformation totale, à déformation plastique et variables internes données,

$$\psi^* = \sup_{\boldsymbol{\epsilon}} \left[\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} - \psi \right]$$

Variables d'état		Variables associées
Observables	Internes	
$\boldsymbol{\epsilon}$	\mathbf{V}_K	$\boldsymbol{\sigma}$
T		s
		\mathbf{A}_K

Tab. 2: Variables thermodynamiques

On aura alors une seconde expression des lois d'état,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad s = \frac{\partial \psi^*}{\partial T} \quad \mathbf{V}_K = -\rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{A}_K}$$

3.2.2 Cas de l'élasto-(visco-)plasticité en petites perturbations

En élasto-(visco-)plasticité, les déformations n'interviennent que sous la forme de leur partition $\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p = \boldsymbol{\epsilon}^e$, soit en posant $\mathbf{V}_0 = \boldsymbol{\epsilon}^p$, :

$$\psi = \psi([\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p], T, \mathbf{V}_K) = \psi(\boldsymbol{\epsilon}^e, T, \mathbf{V}_K) \quad (K \geq 1)$$

ce qui montre que $\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = -\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p}$ et que la variable associée à $\boldsymbol{\epsilon}^p = \mathbf{V}_0$ est :

$$\mathbf{A}_0 = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = -\boldsymbol{\sigma}$$

C'est l'opposé du tenseur des contraintes.

On verra que l'énergie libre est souvent la somme de plusieurs termes fonctions des variables d'état, par exemple la somme d'une contribution thermo-élastique ψ_e , plastique ψ_p , et purement thermique ψ_T ,

$$\psi(\boldsymbol{\epsilon}^e, T, \mathbf{V}_K) = \psi_e(\boldsymbol{\epsilon}^e, T) + \psi_p(T, \mathbf{V}_K) + \psi_T(T)$$

Le terme $\rho\psi_p$ est la densité d'énergie stockée par écrouissage, alors notée w_s , au sein du matériau. Partitionnant $\boldsymbol{\epsilon}$ en $\boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p$:

$$\psi^* = \sup_{\boldsymbol{\epsilon}^e} \left[\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}^e - \psi_e \right] + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}^p - \psi_p - \psi_T$$

où les contributions plastique $\rho\psi_p$ et purement thermique $\rho\psi_T$ ne dépendent pas de la déformation, conduisant à

$$\rho\psi^* = \rho\psi_e^*(\boldsymbol{\sigma}, T) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}^p - \rho\psi_p(T, \mathbf{V}_K) - \rho\psi_T(T)$$

La loi de thermo-élasticité devient

$$\boldsymbol{\epsilon} = \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi_e^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\epsilon}^p \quad \text{soit} \quad \boxed{\boldsymbol{\epsilon}^e = \rho \frac{\partial \psi_e^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

Un exemple d'application à la lettre de transformée de Legendre concerne le potentiel élastique $\rho\psi_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^e : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}^e$ où obtenir le sup sur $\boldsymbol{\epsilon}^e$ précédent consiste

- à écrire que pour ce maximum la dérivée est nulle, soit, sans dilatation thermique,

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon^e} \left[\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \epsilon^e - \psi_e \right] = 0 \quad \text{soit} \quad \boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \epsilon^e} = \mathbf{E} : \epsilon^e \quad \text{et} \quad \epsilon^e = \mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}$$

- à remplacer cette valeur de déformation dans l'expression de ψ^* , ψ^e prenant ainsi la valeur $\frac{1}{2\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}$ et :

$$\rho \psi^* = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} : \epsilon^p - \rho \psi_p - \rho \psi_T$$

3.2.3 Cas de l'(hyper-)élasto-(visco-)plasticité en grandes transformations

En grandes transformations, les mêmes développements peuvent être menés à partir par exemple du potentiel d'état,

$$\psi = \psi(\mathbf{F}, T, \mathbf{F}^p, \mathbf{V}_K) \quad (K \geq 1)$$

où dans le cas de l'hyper-élasticité 4 de MMS nous aurons $\mathbf{F}^p = \mathbf{1}$. Pour la plasticité, une autre écriture (nécessitant la définition du tenseur de Mandel) est détaillée au chapitre 6 de MMS.

Les lois d'état obtenues sont

$$\boldsymbol{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \quad \boldsymbol{\Pi}^p = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}^p} \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad \mathbf{A}_K = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{V}_K}$$

où $\boldsymbol{\Pi}$ est le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff. La première loi d'état est la loi d'hyper-élasticité. Elle est équivalente à

$$\mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}}$$

si \mathbf{E} est la déformation de Green-Lagrange et \mathbf{S} est le second tenseur de Piola-Kirchhoff. La variable $-\boldsymbol{\Pi}^p$ associée à \mathbf{F}^p n'est pas nécessairement le tenseur $-\boldsymbol{\Pi}$.

3.2.4 Cas des transferts d'espèces

Enfin, lorsque les phénomènes de transfert ou de diffusion d'espèces sont modélisés, le potentiel d'état est fonction de variables d'état supplémentaires, par exemple les concentrations massiques de chaque espèce χ_k associées aux potentiels chimiques massiques μ_k^* . L'inégalité de Clausius-Duhem correspondante définit ces derniers via les lois d'état :

$$\mu_k^* = \frac{\partial \psi}{\partial \chi_k}$$

3.3 Dissipation – Lois d'évolution^{σσ}

Le potentiel thermodynamique, on l'a vu, permet d'écrire les relations d'état entre les variables observables et leurs variables associées, mais pour les variables internes, il ne permet que la définition de leurs variables associées. Pour décrire les processus dissipatifs, en particulier l'évolution des variables internes, il faut un formalisme complémentaire. C'est l'objet du potentiel de dissipation φ , du pseudo-potentiel de dissipation φ^* et/ou du potentiel d'évolution F .

3.3.1 Dissipation intrinsèque, dissipation thermique

Compte tenu des lois d'état, l'inégalité de Clausius-Duhem se réduit à l'expression de la dissipation qui doit être positive :

$$\boxed{\Phi = -\mathbf{A}_K \cdot \dot{\mathbf{V}}_K - \frac{\vec{q} \cdot \text{grad } T}{T} \geq 0} \quad (K \geq 0)$$

On remarque que Φ est formé d'une somme de produits de variables forces ou variables associées \mathbf{A}_K , $\vec{g}_q = T \text{ grad } \frac{1}{T} = -\frac{1}{T} \text{ grad } T$ respectivement par les variables flux, $-\dot{\mathbf{V}}_K$, \vec{q} . Le premier terme,

$$\Phi_1 = -\mathbf{A}_K \cdot \dot{\mathbf{V}}_K \quad (K \geq 0)$$

est appelée dissipation intrinsèque (ou dissipation mécanique). Elle est dissipée par l'élément de volume sous forme de chaleur.

Le dernier terme :

$$\Phi_2 = \vec{q} \cdot \vec{g}_q = \vec{q} \cdot T \text{ grad } \frac{1}{T} = -\frac{\vec{q} \cdot \text{grad } T}{T}$$

est la dissipation thermique par conduction.

En plasticité en petites déformations ($\mathbf{V}_0 = \boldsymbol{\epsilon}^p$, $\mathbf{A}_0 = -\boldsymbol{\sigma}$, $K \geq 1$), la somme des deux premiers termes $\Phi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \mathbf{A}_K \cdot \dot{\mathbf{V}}_K$ est encore appelée dissipation mécanique. C'est la puissance plastique amputée du taux d'énergie stockée dans le matériau, par les écrouissages notamment.

Si d'autres phénomènes de transfert ont lieu, les dissipations correspondantes ont une expression similaire (variable flux) · [T × (gradient d'une variable duale)]. Par exemple pour le cas précédent du transfert d'espèces chimiques :

$$\Phi_k = \vec{J}_{\chi_k}^* \cdot T \text{ grad } \left(-\frac{\mu_k^*}{T} \right)$$

3.3.2 Potentiel de dissipation – Lois d'évolution

Pour définir les lois d'évolution relatives aux processus dissipatifs, on peut postuler l'existence d'un *potentiel de dissipation* s'exprimant comme une fonction à valeur scalaire

continue et convexe par rapport aux variables flux, les variables d'état – la température par exemple – pouvant intervenir comme paramètres :

$$\varphi(\dot{\mathbf{V}}_K, \vec{q}) \quad \text{ou} \quad \varphi(\dot{\mathbf{V}}_K, \vec{q}; T \dots) \quad (K \geq 0)$$

Pour satisfaire automatiquement au 2nd principe, il suffit de prendre comme potentiel une fonction convexe, positive et nulle à l'origine dans l'espace des variables flux $-\dot{\mathbf{V}}_K, \vec{q}$ et d'exprimer la propriété de normalité (ou dissipativité normale),

$$\mathbf{A}_K = -\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\mathbf{V}}_K} \quad \vec{g}_q = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{q}}$$

En effet dans ce cas, $\Phi = -\mathbf{A}_K \cdot \dot{\mathbf{V}}_K + \vec{q} \cdot \vec{g}_q = \dot{\mathbf{V}}_K \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\mathbf{V}}_K} + \vec{q} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{q}} \geq \varphi \geq 0$.

En fait il est plus commode d'exprimer les lois d'évolution des variables flux en fonction des forces thermodynamiques qui sont les composantes du vecteur **grad** φ normal au graphe de φ dans l'espace des variables flux. La transformée de Legendre-Fenchel permet de définir le potentiel correspondant $\varphi^*(\mathbf{A}_K, \vec{g}_q)$, dual de φ par rapport aux variables $-\dot{\mathbf{V}}_K, \vec{q}$: *le pseudo-potential de dissipation*. Par définition,

$$\varphi^*(\mathbf{A}_K, \vec{g}_q) = \sup_{(\dot{\mathbf{V}}_K, \vec{q})} \left[(-\mathbf{A}_K \cdot \dot{\mathbf{V}}_K + \vec{g}_q \cdot \vec{q}) - \varphi(\dot{\mathbf{V}}_K, \vec{q}) \right]$$

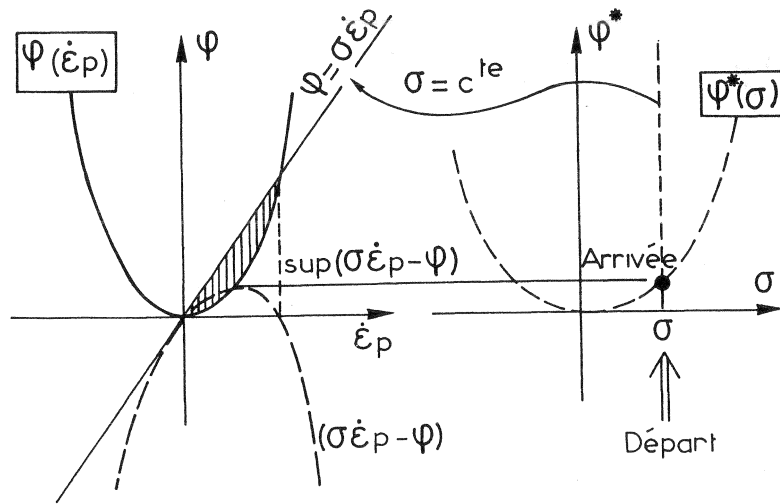


Figure 4: Construction du graphe du pseudo-potential de dissipation $\varphi^*(\sigma)$ dual de $\varphi(\dot{\epsilon}_p)$ par la transformée de Legendre-Fenchel.

Cette transformation, d'écriture un peu barbare, peut être illustrée en visco-plasticité par le graphe de la figure 4 où l'on n'a retenu qu'une seule variable interne $\mathbf{V}_0 = \epsilon^p$. Dans ce cas :

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\epsilon}^p} \Leftrightarrow \dot{\epsilon}^p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma} \quad \text{avec} \quad \varphi^*(\sigma) = \sup_{\dot{\epsilon}^p} [\sigma : \dot{\epsilon}^p - \varphi(\dot{\epsilon}^p)]$$

On démontre de manière générale que si la fonction φ^* est dérivable la propriété de normalité est conservée pour les variables $-\dot{\mathbf{V}}_K, \vec{q}$, les lois d'évolution s'écrivant alors :

$$\boxed{-\dot{\mathbf{V}}_K = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{A}_K} \quad \vec{q} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \vec{g}_q}}$$

Notons une fois encore les propriétés que doivent vérifier les potentiels φ et φ^* pour que le second principe soit automatiquement vérifié : être une fonction convexe, non négative et nulle à l'origine $\mathbf{A}_K = 0, \vec{g}_q = 0$ (et $\boldsymbol{\sigma} = 0$ en (visco-)plasticité). Dans la suite on utilisera généralement le potentiel φ^* et les relations d'évolution des variables flux. Cette règle de normalité est suffisante pour vérifier *a priori* le second principe ; elle n'est pas nécessaire. *Les matériaux standards généralisés* sont ceux pour lesquels cette règle s'applique pour toutes les variables internes (normalité généralisée, ce sera le cas en visco-plasticité). La première relation $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ conduit aux lois d'écoulement plastique ou visco-plastique, la seconde relation $\dot{\mathbf{V}}_K = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{A}_K}$ ($K \geq 1$) exprime les lois d'évolution des variables internes écrouissage), la dernière $\vec{q} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \vec{g}_q}$ conduit à la loi de Fourier pour la thermostatique. Le tableau 3 résume les variables de dissipation.

Variables flux	Variables associées
$-\dot{\mathbf{V}}_K$ \vec{q} $\vec{J}_{\chi_k}^*$	\mathbf{A}_K $\vec{g}_q = -\frac{\text{grad } T}{T}$ $T \text{ grad } \left(-\frac{\mu_k^*}{T} \right)$

Tab. 3: Variables de dissipation (avec en (visco-)plasticité $\mathbf{V}_0 = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \mathbf{A}_0 = -\boldsymbol{\sigma}$).

Tout le problème de la modélisation des phénomènes réside dans la détermination de l'expression analytique du potentiel d'état ψ et du potentiel de dissipation φ ou de son dual φ^* et dans leur identification d'après des expériences caractéristiques. En fait, les valeurs de φ ou de φ^* sont difficilement accessibles à la mesure car elles représentent une énergie le plus souvent dissipée sous forme de chaleur. Les variables flux et les variables duales se prêtent bien mieux à la mesure et c'est sur leurs relations que portent la modélisation et l'identification.

Les lois d'évolution sont donc identifiées directement mais le potentiel de dissipation sert de guide ou de cadre pour leur écriture.

Notons enfin que l'écriture des potentiels de dissipation peut être généralisée en faisant intervenir les variables d'état elles mêmes, qui jouent alors le rôle de paramètres. Le

développement précédent n'est en rien modifié. Les potentiels de dissipation s'écrivent alors, si l'on fait apparaître déformations élastique et plastique,

$$\varphi(\dot{\epsilon}^p, \dot{\mathbf{V}}_K, \vec{q}; T, \epsilon^e, \mathbf{V}_K) \quad \text{ou} \quad \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}_K, \vec{g}_q; T, \epsilon^e, \mathbf{V}_K)$$

3.3.3 Relations de symétrie d'Onsager

Une première simplification consiste à supposer que la fonction φ_T^* est une forme quadratique définie positive des variables duales. Si l'on désigne par \mathbf{J}_α les variables flux (incluant $\dot{\epsilon}^p$, $-\dot{\mathbf{V}}_K$, \vec{q} et les $\vec{J}_{\chi_k}^*$) et par \mathbf{A}_α les variables duales associées, le potentiel φ^* peut s'écrire en utilisant la convention de sommation d'Einstein :

$$\varphi^* = \frac{1}{2} \mathbf{A}_\alpha \cdot C_{\alpha\beta}(T, \epsilon^e, \mathbf{V}_K) \cdot \mathbf{A}_\beta$$

Chaque loi d'évolution est linéaire par rapport à la variable duale correspondante :

$$\mathbf{J}_\alpha = \frac{1}{2} (C_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha}) \cdot \mathbf{A}_\beta = C_{\alpha\beta} \mathbf{A}_\beta$$

La matrice C est symétrique. Cette propriété est connue sous le nom de relation de symétrie d'Onsager et sera utilisée lors de l'étude des couplages multiphysiques (chapitre 11 de MMS).

3.3.4 Découplage des dissipations intrinsèque et thermique

Une deuxième simplification consiste à supposer le découplage entre dissipation intrinsèque et dissipation thermique, ce qui n'implique pas que les mécanismes correspondants soient découplés. Cela revient à considérer que le potentiel de dissipation est la somme de deux termes (couplage faible), l'un dépendant des variables duales \mathbf{A}_K , l'autre faisant intervenir la variable \vec{g}_q :

$$\varphi^* = \varphi_1^*(\mathbf{A}_K) + \varphi_2^*(\vec{g}_q)$$

où une expression pour φ_2^* est donnée au paragraphe 4. Le second principe est satisfait par les inégalités respectives ($K \geq 0$) :

$$\Phi_1 = -\mathbf{A}_K \bullet \dot{\mathbf{V}}_K = \mathbf{A}_K \bullet \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \mathbf{A}_K} \geq 0 \quad \text{et} \quad \Phi_2 = -\frac{\vec{q} \cdot \text{grad } T}{T} \geq 0$$

Notons que la première inégalité est automatiquement vérifiée puisque φ_1^* est convexe en \mathbf{A}_K et contient l'origine. Si l'on fait apparaître la déformation plastique, on a alors :

$$\Phi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\epsilon}^p - \mathbf{A}_K \bullet \dot{\mathbf{V}}_K = \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{A}_K \bullet \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \mathbf{A}_K} \geq \varphi_1^* \geq 0 \quad (K \geq 1)$$

3.3.5 Potentiel d'évolution pour les phénomènes dissipatifs instantanés

Lorsque le comportement est indépendant des vitesses, le potentiel de dissipation $\varphi(\dot{\epsilon}^p, \dots)$ est positivement homogène de degré 1 et sa fonction duale φ^* est non différentiable. On écrit alors que $\dot{\epsilon}^p$ appartient au sous-différentiel de φ^* défini par :

$$\partial\varphi^*(\sigma_0) = \{\dot{\epsilon}^p / \varphi^*(\sigma) - \varphi^*(\sigma_0) \geq \dot{\epsilon}^p : (\sigma - \sigma_0), \forall \sigma\}$$

On introduit la fonction "critère" convexe $f(\sigma)$ et le convexe $f = 0$ a pour fonction indicatrice $\partial\varphi^*$:

$$\begin{aligned} \partial\varphi^* &= 0 & \text{si } f < 0 & \rightarrow \dot{\epsilon}^p = 0 \\ \partial\varphi^* &= +\infty & \text{si } f = 0 & \rightarrow \dot{\epsilon}^p \neq 0 \text{ (charge) ou égal à 0 (décharge, chargement neutre!)} \end{aligned}$$

$\dot{\epsilon}^p$ appartient au sous-différentiel ou au cône des normales :

$$\boxed{\dot{\epsilon}^p \in \partial\varphi^* \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad \text{si} \quad \begin{cases} f = 0 \\ \dot{f} = 0 \end{cases}}$$

où $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur déterminé par la condition de cohérence $f = 0$ et $\dot{f} = 0$. On parle de modèles associés car la surface de charge f est en même temps le potentiel d'écoulement.

Equivalent à la donnée du potentiel de dissipation telle que présentée ci-dessus, le principe du travail maximal de Hill stipule en plasticité parfaite que pour un état de contrainte donné, la vitesse de déformation plastique maximise la puissance plastique $\int \sigma : \dot{\epsilon}^p dt$.

Dans le cas plus général de l'érouissage ou de l'endommagement et anticipant le fait (chapitre 6 de MMS) que la plasticité se fera sous la condition du critère $f \leq 0$, les flux des variables internes pour un état de contrainte et de forces thermodynamiques \mathbf{A}_K fixées ($K \geq 0$) correspondent au maximum de la dissipation intrinsèque $-\mathbf{A}_K \cdot \mathbf{V}_K$ ou au minimum de $\mathbf{A}_K \cdot \mathbf{V}_K$. En effet la minimisation de $-\Phi_1 = \mathbf{A}_K \cdot \mathbf{V}_K$ sous la contrainte $f \leq 0$

$$\mathbf{A}_K \cdot \dot{\mathbf{V}}_K \quad \text{minimal sous la condition } f \leq 0$$

est une minimisation sous contrainte (au sens mathématique du terme). Le minimum satisfait grâce aux conditions de Kuhn-Tucker

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_K} (\mathbf{A}_K \cdot \dot{\mathbf{V}}_K + \dot{\lambda} f) = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{\lambda} \geq 0 \\ f \leq 0 \\ \dot{\lambda} f = 0 \end{cases}$$

où $\dot{\lambda}$ est un multiplicateur de Lagrange. On obtient la règle de normalité, entendue normalité à la surface limitant le domaine d'élasticité définie par $f = 0$,

$$\boxed{-\dot{\mathbf{V}}_K = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}_K}} \quad \rightarrow \quad \dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad \text{si } (\mathbf{V}_0, \mathbf{A}_0) = (\epsilon^p, -\sigma)$$

On parle de normalité généralisée quand il y a normalité pour toutes les variables internes (dans le cas associé aussi),

$$\boxed{-\dot{\mathbf{V}}_K = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_K}}$$

Comme cas particuliers importants, on aura en plasticité $F = F(\boldsymbol{\sigma}, \dots)$ (couple de variables $(\mathbf{V}_0, \mathbf{A}_0) = (\boldsymbol{\epsilon}^p, -\boldsymbol{\sigma})$) et

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

et pour les modèles d'endommagement $F = F(Y, \dots)$ (couple de variables $(D, -Y)$)

$$\dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Y}$$

La convexité de F et sa nullité à l'origine garantissent automatiquement la positivité de la dissipation,

$$\Phi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \mathbf{A}_K \cdot \dot{\mathbf{V}}_K = \dot{\lambda} \left[\boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{A}_K \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_K} \right] \geq 0$$

Cette écriture peut être utilisée pour les comportements dépendant du temps en omettant les conditions de cohérence $f = 0$ & $\dot{f} = 0$ et de Kuhn-Tucker (équivalentes) $\dot{\lambda} \geq 0$, $f \leq 0$, $\dot{\lambda} f = 0$, mais qu'il faut remplacer par une loi d'évolution pour le multiplicateur (loi de viscosité en visco-plasticité).

4 Éléments de thermique

4.1 Loi de Fourier[♣]

La loi de diffusion de la chaleur, ou loi de Fourier, relation linéaire entre le flux de chaleur \vec{q} et le gradient de température $\text{grad } T$ est une conséquence directe des deux simplifications précédentes apportées à l'écriture du potentiel de dissipation, le découplage des dissipations et l'utilisation d'une forme quadratique pour φ_2^* , soit :

$$\varphi_2^* = \frac{1}{2} \vec{g}_q \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{g}_q \quad \text{et} \quad \vec{q} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \vec{g}_q} = \mathbf{C} \cdot \vec{g}_q = -\frac{\mathbf{C}}{T} \cdot \text{grad } T$$

Si l'on fait l'hypothèse d'isotropie des propriétés de diffusion du milieu, le tenseur \mathbf{C} se réduit à un scalaire. De plus, on considère que ce scalaire est fonction de la température si bien que l'on peut poser :

$$\boxed{\vec{q} = -k \text{ grad } T} \quad \text{ou} \quad q_i = -k T_{,i}$$

k est la conductivité thermique du milieu (voir tableau 4 pour les valeurs relatives à quelques matériaux particuliers).

	Température de fusion T_M °C	Masse volumique ρ kg/m ³	Conductivité thermique k W/m °C	Chaleur spécifique C_e J/kg °C
Duralumins	600	2800	$\left\{ \begin{array}{l} 115 \text{ à } 20^\circ\text{C} \\ 150 \text{ à } 200^\circ\text{C} \end{array} \right.$	900 à 20°C
Aciers	1500	7800	$\left\{ \begin{array}{l} 46 \text{ à } 20^\circ\text{C} \\ 29 \text{ à } 900^\circ\text{C} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 460 \text{ à } 20^\circ\text{C} \\ 625 \text{ à } 900^\circ\text{C} \end{array} \right.$
Aluminium	660	2700	240 à 20°C	900 à 20°C
Titane	1670	4500	20 à 20°C	520 à 20°C
Laitons	900	8600	128 à 400°C	450 à 400°C
Polymères	200	1300		1500 à 20°C
Céramiques	2000	2500		900 à 20°C
Bétons	2200	2200	1 à 20°C	880 à 20°C
Verre	1550	2500	1,2 à 20°C	850 à 20°C
Bois	–	$\left\{ \begin{array}{l} 500 \text{ à HR } 0\% \\ 1000 \text{ à HR } 50\% \end{array} \right.$	0,15 à 20°C	2000 à 20°C

Tab. 4: Ordre de grandeur des caractéristiques thermodynamiques de quelques matériaux (humidité relative notée HR).

4.2 Equation de la chaleur^{♣♣}

Reprenons l'équation de conservation de l'énergie (premier principe)

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + r - \text{div } \vec{q} \quad (K \geq 0)$$

et remplaçons $\rho \dot{e}$ par son expression $\rho \dot{e} = \rho \dot{\psi} + \rho T \dot{s} + \rho s \dot{T}$ tirée de $e = \psi + Ts$, puis $\dot{\psi}$ par son expression en fonction des variables d'état, soit :

$$\rho \dot{e} = \rho \left[\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - s \dot{T} + \frac{1}{\rho} \mathbf{A}_K \cdot \dot{\mathbf{V}}_K \right] + \rho T \dot{s} + \rho s \dot{T}$$

il vient

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{A}_K \cdot \dot{\mathbf{V}}_K + \rho T \dot{s} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + r - \text{div } \vec{q}$$

Avec $s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}(\boldsymbol{\epsilon}, T, \mathbf{V}_K)$ on peut encore exprimer \dot{s} comme

$$\dot{s} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon} \partial T} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{V}_K \partial T} \cdot \dot{\mathbf{V}}_K = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{A}_K}{\partial T} \cdot \dot{\mathbf{V}}_K$$

En introduisant la chaleur spécifique définie par :

$$C = T \frac{\partial s}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}$$

et compte tenu de la loi de Fourier $\vec{q} = -k \text{grad } T$, $\text{div } \vec{q} = -k \text{div}(\text{grad } T) = -k \Delta T$, on obtient

$$\boxed{\rho C \dot{T} = k \Delta T + r - \mathbf{A}_K \cdot \dot{\mathbf{V}}_K + T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial \mathbf{A}_K}{\partial T} \cdot \dot{\mathbf{V}}_K \right]} \quad (K \geq 0)$$

qui est l'équation complète de la chaleur, où Δ est l'opérateur Laplacien.

En plasticité (ou en visco-plasticité) en petites perturbations, on a la partition de la déformation $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p$ en parties élastique $\boldsymbol{\epsilon}^e$ et plastique $\boldsymbol{\epsilon}^p$ et l'équation précédente se réécrit :

$$\rho C \dot{T} = k \Delta T + r + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \mathbf{A}_K \cdot \dot{\mathbf{V}}_K + T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \frac{\partial \mathbf{A}_K}{\partial T} \cdot \dot{\mathbf{V}}_K \right] \quad (K \geq 1)$$

On a conjointement la partition de l'énergie libre $\rho\psi = \rho\psi_e + \rho\psi_p + \rho\psi_T$ en énergies élastique $\rho\psi_e = w_e([\boldsymbol{\epsilon}^e = \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p], T)$, plastique $\rho\psi_p(\mathbf{V}_K, T)$ et purement thermique $\rho\psi_T(T)$ (voir chapitre 6 de MMS). Le terme $\rho\psi_p = w_s$ représente l'énergie non récupérable stockée dans le matériau. Pour les matériaux métalliques, cette énergie est celle des champs de microcontraintes résiduelles accompagnant l'augmentation de la densité des dislocations et sera fonction des écrouissages. En anisotherme, $(\cdot)_{,T} = \frac{\partial}{\partial T}$ désignant la dérivée partielle par rapport à la température,

$$\rho \dot{\psi}_p = \dot{w}_s = \rho \frac{\partial \psi_p}{\partial \mathbf{V}_K} \cdot \dot{\mathbf{V}}_K + \frac{\partial w_s}{\partial T} \dot{T} = \mathbf{A}_K \cdot \dot{\mathbf{V}}_K + w_{s,T} \dot{T}$$

soit $\mathbf{A}_K \cdot \dot{\mathbf{V}}_K = \dot{w}_s - w_{s,T} \dot{T}$ de sorte que l'équation de la chaleur prend la forme

$$(\rho C - w_{s,T}) \dot{T} = k \Delta T + r + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \dot{w}_s + T \left[\boldsymbol{\sigma}_{,T} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \mathbf{A}_{K,T} \cdot \dot{\mathbf{V}}_K \right]$$

où la chaleur spécifique est affectée par le couplage écrouissages-température.

Le fait que l'énergie $w_s = \rho\psi_p$ soit stockée au sein du matériau se traduit par le terme $\rho\psi_p$ (positif) dans l'énergie libre. Cette énergie ne peut alors partir en chaleur et son taux $\dot{w}_s = \rho \dot{\psi}_p$ est retranché aux sources de chaleurs à distance r , due au travail plastique $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ et d'origine thermomécanique $T[\boldsymbol{\sigma}_{,T} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \mathbf{A}_{K,T} \cdot \dot{\mathbf{V}}_K]$ (couplage mécanique-température variable, par la dilatation thermique et par la dépendance des paramètres "matériau" à la température).

4.3 Propagation classique de la chaleur[♣]

L'équation de la chaleur en régime instationnaire $\rho C \dot{T} = k \Delta T$ correspond à un processus :

- sans variation de déformation inélastique, $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = 0$,
- sans variation des variables internes, $\mathbf{A}_K \cdot \dot{\mathbf{V}}_K = 0$,
- sans production interne de chaleur créée par des sources externes, $r = 0$,

– sans couplage thermomécanique, $\boldsymbol{\sigma}_{,T} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = 0$, $\mathbf{A}_{K,T} \cdot \dot{\mathbf{V}}_K = 0$, $w_{s,T} = 0$.

Les valeurs de ces trois derniers termes sont en effet négligeables dans la plupart des applications. La chaleur spécifique est alors la chaleur spécifique à déformation constante :

$$C = C_\epsilon = T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_\epsilon = -T \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \right|_\epsilon \quad \text{et} \quad \boxed{\rho C_\epsilon \dot{T} = k \Delta T}$$

Le tableau 4 donne quelques valeurs particulières.

4.4 Echauffement adiabatique des métaux^{♣♣}

L'équation complète de la chaleur permet également de trouver l'élévation de température d'un milieu sujet à dissipation mécanique. Pour cela il suffit de la résoudre conjointement aux équations d'équilibre.

L'équation classique utilisée pour calculer l'échauffement des matériaux métalliques, lors des processus de mise en forme par exemple, correspond à l'équation générale

$$(\rho C - w_{s,T}) \dot{T} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \dot{w}_s + k \Delta T + r + T \left[\boldsymbol{\sigma}_{,T} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \mathbf{A}_{K,T} \cdot \dot{\mathbf{V}}_K \right]$$

avec les simplifications suivantes :

- une évolution adiabatique (sans transfert de chaleur, $k \Delta T = 0$),
- pas de source interne de chaleur créée par des sources externes ($r = 0$),
- pas de couplage thermomécanique ($\boldsymbol{\sigma}_{,T} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \mathbf{A}_{K,T} \cdot \dot{\mathbf{V}}_K = 0$, $w_{s,T} = 0$),

L'équation approchée de l'échauffement adiabatique est alors :

$$\rho C \dot{T} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \dot{w}_s \approx \beta \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$$

où en mise en forme le coefficient β est souvent pris égal à 0,9 ($\beta = 1$ est une première approximation surestimant la température). Cette dernière équation n'est plus une équation de champ, elle peut être résolue localement en même temps que l'intégration de la loi de comportement : adiabatique signifie bien "sans échange de chaleur".

4.5 Premier principe et équation de la chaleur en grandes transformations^{♣♣♣}

Certains matériaux, les élastomères en fatigue notamment, s'échauffent lors de chargements induisant de grandes, voire de très grandes déformations. Le premier principe s'écrit alors avec le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, $\boldsymbol{\Pi}$,

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \text{div } \vec{q} = \frac{\rho}{\rho_0} \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{F}} + r - \text{div } \vec{q}$$

l'utilisation de la décomposition multiplicative du gradient de la transformation $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$ (dilatation thermique incluse, avec $\mathbf{F}^p = \mathbf{1}$ sans plasticité) et les lois d'état obtenues au paragraphe 3.2.3,

$$\boldsymbol{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \quad \boldsymbol{\Pi}^p = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}^p} \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad \mathbf{A}_K = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{V}_K}$$

permettent de reprendre tous les développements précédents et d'aboutir à l'équation de la chaleur

$$\rho C \dot{T} = k \Delta T + r + \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{\Pi}^p : \dot{\mathbf{F}}^p - \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{A}_K \bullet \dot{\mathbf{V}}_K + \frac{\rho}{\rho_0} T \left[\mathbf{\Pi}_{,T} : \dot{\mathbf{F}} - \mathbf{\Pi}_{,T}^p : \dot{\mathbf{F}}^p + \mathbf{A}_{K,T} \bullet \dot{\mathbf{V}}_K \right]$$

écrite sur la configuration déformée, avec des termes "sources" dus aux grandes déformations, thermo-élastiques (au travers de la contribution $\mathbf{\Pi}_{,T} : \dot{\mathbf{F}}$), plastiques et thermo-plastiques.

5 Bibliographie

- BAMBERGER Y. *Mécanique de l'ingénieur, II : milieux déformables*. Hermann (1981).
- BOTSIS J., DELVILLE M. *Mécanique des milieux continus : une introduction*. Presses Polytechniques et universitaires romandes (2006).
- CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 56th Edition (1975-1976).
- ERINGEN A. C. *Mechanics of continua*, J. Wiley (1967).
- GERMAIN P., MÜLLER P. *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Masson (1980).
- GERMAIN P. *Cours de mécanique des milieux continus*. Masson (1973).
- HAUPT P. *Continuum mechanics and theory of materials*. Springer (2000).
- KESTIN J., RICE J.R. *A critical review of thermodynamics*, Stuart Ed. Mono book (1970).
- LEMAITRE J., CHABOCHE J.-L., BENALLAL A., DESMORAT R. *Mécanique des matériaux solides*, 3e Edition, Dunod, 2009.
- MAUGIN G. *Thermodynamics of plasticity and fracture*, Cambridge University Press (1992).
- NEMAT-NASSER S. *Mechanics today*, Vol. I, II, III, IV, V. Pergamon Press (1972-1980).
- SALENÇON J. *Mécanique des milieux continus*. Ellipses, Paris (2000-2002).
- TRUESDELL C. *The elements of continuum mechanics*, Springer Verlag (1966).
- TRUESDELL C. *A First Course in Rational Continuum Mechanics : General concepts*. Second edition, Academic Press (1991).