

Exemple de diagnostic d'une simulation : Déformations d'un portique

Cette ressource a été créée dans le cadre des projets didactiques de première année du Département de Génie Mécanique de l'ENS de Cachan [1].

Elle illustre la démarche classique du diagnostic dans l'enseignement des sciences de l'ingénieur, consistant d'une part à simuler leur comportement, et d'autre part à valider les simulations au moyen d'essais (voir ressource « *La démarche scientifique dans la réalisation des produits industriels* »). Le support de cette illustration est un portique métallique de forme simple, soumis à deux types de chargement différents.

Plusieurs simulations sont effectuées. Toutes sont basées sur la théorie des poutres, avec ou sans discrétisation par éléments finis, et font appel à divers logiciels ou formulaires. Les résultats ainsi obtenus (plus précisément, les déplacements d'un point de la structure) sont ensuite confrontés à un essai sur un portique réel.

1 - Description du support

1.1 - Géométrie

Le support de l'étude est un portique métallique dont le dessin de définition est donné sur la figure 1.

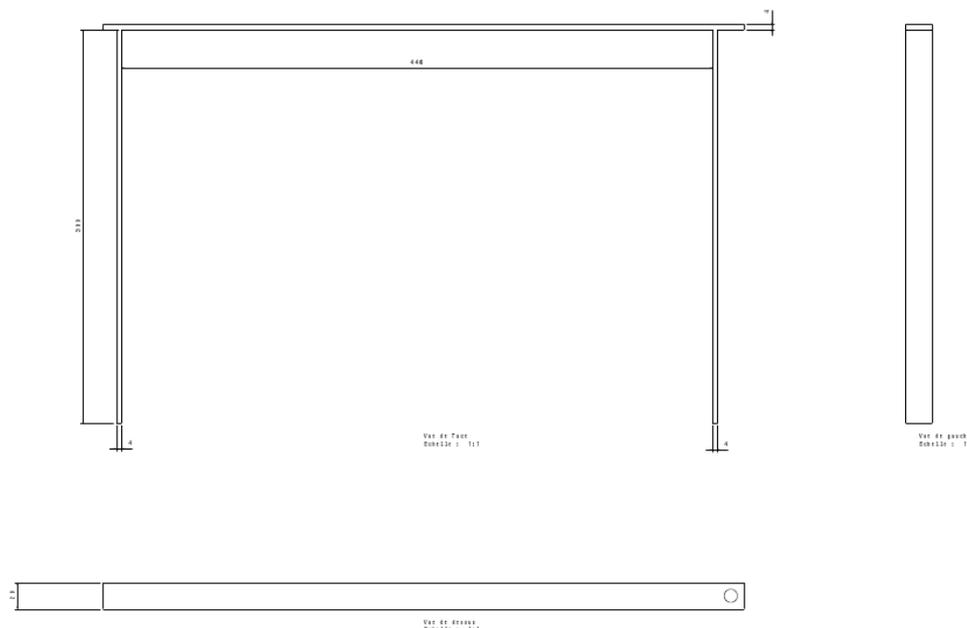


Figure 1 : Dessin de définition du portique

Ce portique est constitué de trois barres de section rectangulaire en acier doux, soudées entre elles, d'épaisseur $e = 5$ mm et de largeur $b = 15$ mm. La barre transversale est de longueur 484 mm, et la distance entre les poteaux est de $L = 450$ mm ; les deux poteaux sont de hauteur 300

mm, et sont encastres à leur extrémité inférieure par serrage dans des étaux, ce qui réduit la hauteur utile à $h = 260$ mm.

1.2 - Chargement

Deux types de chargements différents ont été testés, d'amplitudes variables, et pouvant être modélisés par des forces concentrées :

- Un effort horizontal appliqué à l'extrémité gauche de la barre transversale (figure 2),
- Un effort vertical appliqué au centre de la barre transversale (figure 3).

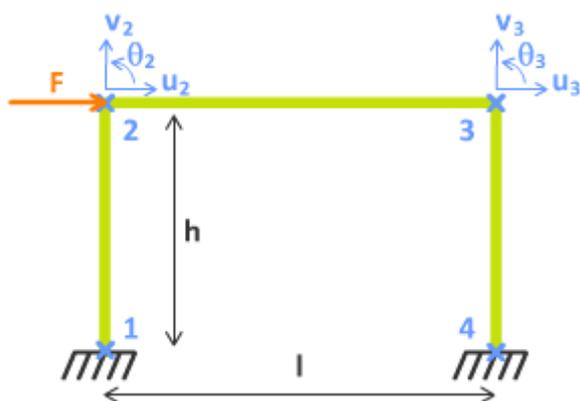


Figure 2 : Cas de chargement 1

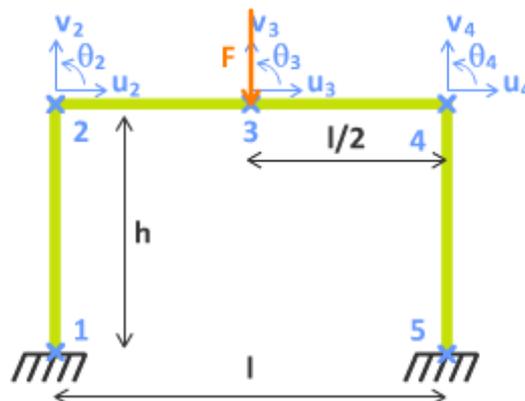


Figure 3 : Cas de chargement 2

2 - Modélisation par la résistance des matériaux

Le portique est modélisé à l'aide de la résistance des matériaux (RdM), sous forme de trois poutres droites encastrees au bâti et entre elles, comme illustré sur les figures 2 et 3.

Leurs caractéristiques géométriques sont celles du dessin de définition ci-dessus (figure 1) ; cela conduit à une section constante, commune aux trois poutres, d'aire 750 mm^2 et de moment d'inertie quadratique $I_z = 156,25 \text{ mm}^4$. Les chargements sont modélisés par des forces concentrées, et la relation de comportement est choisie élastique linéaire, homogène et isotrope, de module d'Young $E = 200 \text{ GPa}$.

Ce modèle étant hyperstatique, une résolution analytique « à la main » serait fastidieuse, bien que possible ; nous avons donc utilisé des logiciels et des formulaires pour résoudre le problème. Nous présentons ici trois de ces outils ; les résultats correspondants sont donnés dans la dernière partie de la ressource.

2.1 - Résolution à l'aide du logiciel pyBar

pyBar [2] est un logiciel libre de calcul de RdM, basé sur la méthode des déplacements et donnant des résultats exacts (c'est-à-dire égaux à la solution analytique) pour la plupart des chargements courants (concentrés, constants et trapézoïdaux sur chaque barre).

Les résultats sont donnés dans le chapitre 5 « Comparaison des résultats ». A titre d'illustration, les figures 4 et 5 représentent la déformée du portique pour les deux cas de chargement, donnée par pyBar.

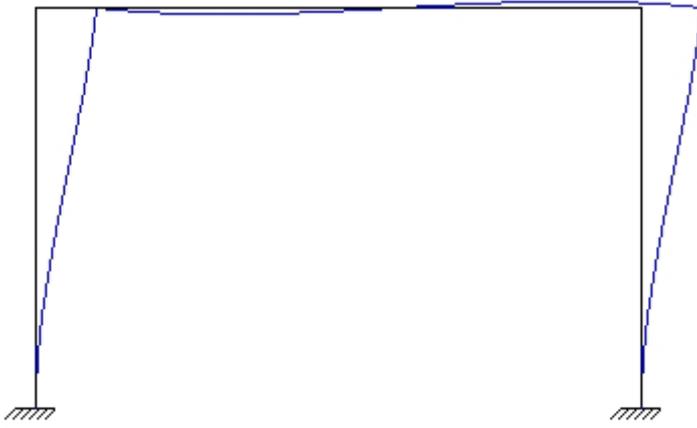


Figure 4 : Déformée du portique pour un cas de chargement 1 ($F=100\text{ N}$)
(facteur d'amplification : 3550)

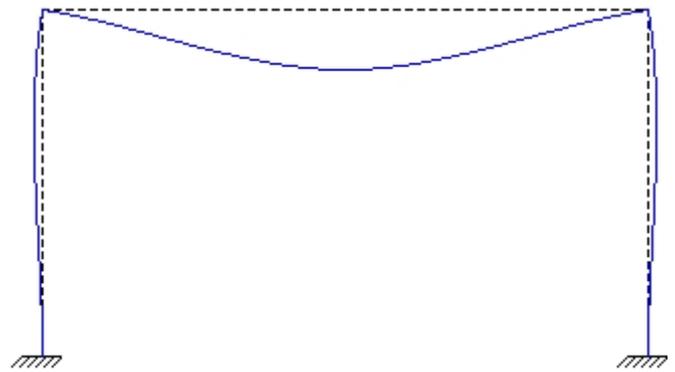


Figure 5 : Déformée du portique pour un cas de chargement 2 ($F=100\text{ N}$)
(facteur d'amplification : 14763)

2.2 - Résolution à l'aide du calculateur Steelbiz

Certains professionnels permettent le calcul de structures via des logiciels « maison ». C'est le cas de la société Steelbiz [3] qui propose un calculateur en ligne pour différents types de portiques courants, basé sur un formulaire de RdM.

A noter que seul le premier cas de chargement est disponible dans ce calculateur.

2.3 - Résolution à l'aide du formulaire Deltalab

Dans un souci d'exhaustivité de l'étude, nous avons également résolu directement le problème de RdM à l'aide d'un formulaire commercialisé par Deltalab.

Cas de chargement 1

La flèche est donnée par la formule :

$$\Delta f = \frac{Fh^3(3h + 2l)}{12EI(6h + l)}$$

Cas de chargement 2

La flèche est donnée par la formule :

$$\Delta f = \frac{Fl^3(2h + l)}{96EI(h + 2l)}$$

Remarque : Le dimensionnement du portique expérimental a été réalisé grâce à ces formules.

3 - Modélisation par éléments finis 1D

Le portique a également été modélisé par éléments finis, à l'aide d'éléments de poutres en flexion (voir ressource « Introduction à la simulation par éléments finis »).

Pour simplifier le problème, nous avons fait l'hypothèse que les déplacements et déformations dus à la traction ou compression des différentes barres sont négligeables devant ceux dus à la flexion ; ce constat, courant en RdM, se vérifie ici lorsque l'on examine les résultats du calcul de RdM complet réalisé avec pyBar. Cela nous a conduit à ne considérer que la flexion des barres ; pour ce faire, nous avons choisi des éléments de Hermite, c'est-à-dire des éléments possédant deux degrés de liberté par nœud (déplacement transversal et rotation). La formulation de ces éléments est précisée en annexe.

Les modèles étant extrêmement simples, une mise en équations et une résolution analytiques, « à la main » sont proposées ; il va cependant de soi que pour un modèle de plus grande taille, ces

opérations seraient réalisées numériquement et automatiquement à l'aide d'un logiciel de simulation.

3.1 - Cas de chargement 1

Le premier cas de chargement est donné sur la figure 2. Pour étudier ce cas, nous avons utilisé un élément par poutre, et un total de 4 nœuds. Un élément « poutre en flexion » de Hermite est en effet strictement équivalent à une poutre continue, c'est-à-dire non discrétisée, en flexion d'Euler-Bernoulli si celle-ci ne comporte aucune charge répartie et si le modèle du comportement du matériau est élastique linéaire, homogène et isotrope, ce qui est le cas ici : il est donc inutile d'employer plus d'éléments.

Conditions aux limites

Le portique est encastré dans le sol au niveau des nœuds 1 et 4 (voir figure 2). Les déplacements (linéiques et angulaires) de ces nœuds sont donc nuls :

- $u_1 = v_1 = \theta_1 = 0$
- $u_4 = v_4 = \theta_4 = 0$

Hypothèses

On néglige la variation de longueur des barres dues à l'effort normal dans celles-ci. Ainsi, le déplacement vertical du nœud 1 sera le même que celui du nœud 2 ; il en va de même pour le déplacement vertical des nœuds 3 et 4, et pour le déplacement horizontal des nœuds 2 et 3. Cela s'écrit :

- $v_2 = v_1 (= 0)$
- $v_3 = v_4 (= 0)$
- $u_2 = u_3$

Bilan sur les inconnues cinématiques du problème

Chacun des 4 nœuds possède a priori 3 degrés de liberté, soit un total de 12 inconnues. Cependant, après prise en compte des relations ci-dessus, il ne reste que 3 inconnues indépendantes, et le vecteur des inconnues est le suivant :

$$X = \begin{pmatrix} u_2 = u_3 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Matrice de rigidité du portique

La matrice de rigidité du portique est obtenue par l'assemblage des trois matrices élémentaires de chacune des poutres K_{12} , K_{23} et K_{34} (voir « *Annexe : Formulation locale d'un élément fini de type poutre en flexion* »). Par exemple, la matrice élémentaire de la poutre 12 dans le repère local est donné par :

$$K_{12} = \frac{EI_z}{h^3} \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times \\ & & 12 & -6h \\ & & & 4h^2 \end{pmatrix}$$

Après assemblage des 3 matrices élémentaires, la matrice de rigidité du portique est :

$$K_p = EI_z \begin{pmatrix} \frac{24}{h^3} & \frac{6}{h^2} & \frac{6}{h^2} \\ \frac{4}{h} + \frac{4}{l} & \frac{2}{l} & \\ \frac{4}{h} + \frac{4}{l} & & \frac{2}{l} \end{pmatrix}$$

Vecteur force généralisé

Le vecteur force généralisé est donné par : $F_p = (F \ 0 \ 0)$

Résolution

Afin d'obtenir les déplacements, il faut donc résoudre le système suivant :

$$F_p = K_p X$$

La résolution a été effectuée grâce au logiciel Octave. Pour un effort de 10 N, le résultat est :

$$X = \begin{pmatrix} 0,3917437 \\ -0,0012107 \\ -0,0012107 \end{pmatrix}$$

3.2 - Cas de chargement 2

Le second cas de chargement est donné sur la figure 3. Par rapport au modèle précédent, nous avons ajouté un cinquième nœud au milieu de la poutre transversale, afin de pouvoir y imposer un chargement concentré.

Conditions aux limites

L'encastrement des nœuds 1 et 5 (figure 3) imposent des déplacements linéiques et angulaires nuls de ces points :

- $u_1 = v_1 = \theta_1 = 0$
- $u_5 = v_5 = \theta_5 = 0$

Hypothèses

De même que précédemment, la longueur des barres est supposée invariante, ce qui se traduit de la façon suivante :

- $v_1 = v_2$
- $u_2 = u_3 = u_4$
- $v_4 = v_5$

Bilan sur les inconnues cinématiques du problème

Les conditions limites en déplacement et les hypothèses nous amènent au vecteur des inconnues suivant :

$$X = \begin{pmatrix} u_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

Matrice de rigidité du portique

La matrice de rigidité pour ce cas de chargement est :

$$K_p = EI_z \begin{pmatrix} \frac{24}{h^3} & \frac{6}{h^2} & 0 & 0 & \frac{6}{h^2} \\ & \frac{4}{h} + \frac{8}{l} & \frac{-24}{l^2} & \frac{4}{l} & 0 \\ & & \frac{192}{l^3} & 0 & \frac{24}{l^2} \\ & & & \frac{16}{l} & \frac{4}{l} \\ & & & & \frac{4}{h} + \frac{8}{l} \end{pmatrix}$$

Vecteur force généralisé

Le vecteur force généralisé pour ce cas de chargement est :

$$F_p = (0 \quad 0 \quad -F \quad 0 \quad 0)$$

Résolution

Pour un effort de 10 N, la résolution du système $F_p = K_p X$, donne comme résultat :

$$X = \begin{pmatrix} 7,0456 \times 10^{-18} \\ -9,0776 \times 10^{-4} \\ -2,5400 \times 10^{-1} \\ -5,1993 \times 10^{-20} \\ 9,0776 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

4 - Etude expérimentale

Pour réaliser l'étude expérimentale, le portique a été fabriqué (par soudage de trois plaques d'acier doux coupées aux bonnes dimensions), percé de trous permettant sa mise en charge, puis monté sur un support rigide à l'aide d'étaux (voir figure 6).



Figure 6 : Dispositif expérimental

4.1 - Cas de chargement 1

Pour le premier cas de chargement, la charge est appliquée à l'aide de masses suspendues à une corde, par l'intermédiaire d'une poulie située sur la droite du portique (voir figures 6 et 7). Un comparateur est installé pour mesurer le déplacement horizontal du nœud 2.



Figure 7 : Dispositif d'application de la charge au portique pour le cas de chargement 1

4.2 - Cas de chargement 2

Pour le second cas de chargement, les masses sont directement suspendues au milieu du portique grâce à un crochet (figure 8). Le comparateur est placé directement au dessus du crochet pour permettre la mesure du déplacement vertical du nœud 3.



Figure 8 : Dispositif d'application de la charge au portique pour le cas de chargement 2

5 - Comparaison des résultats

Les différentes méthodes sont rappelées dans la figure 9 qui résume le cadre de la modélisation du portique et de la validation expérimentale.

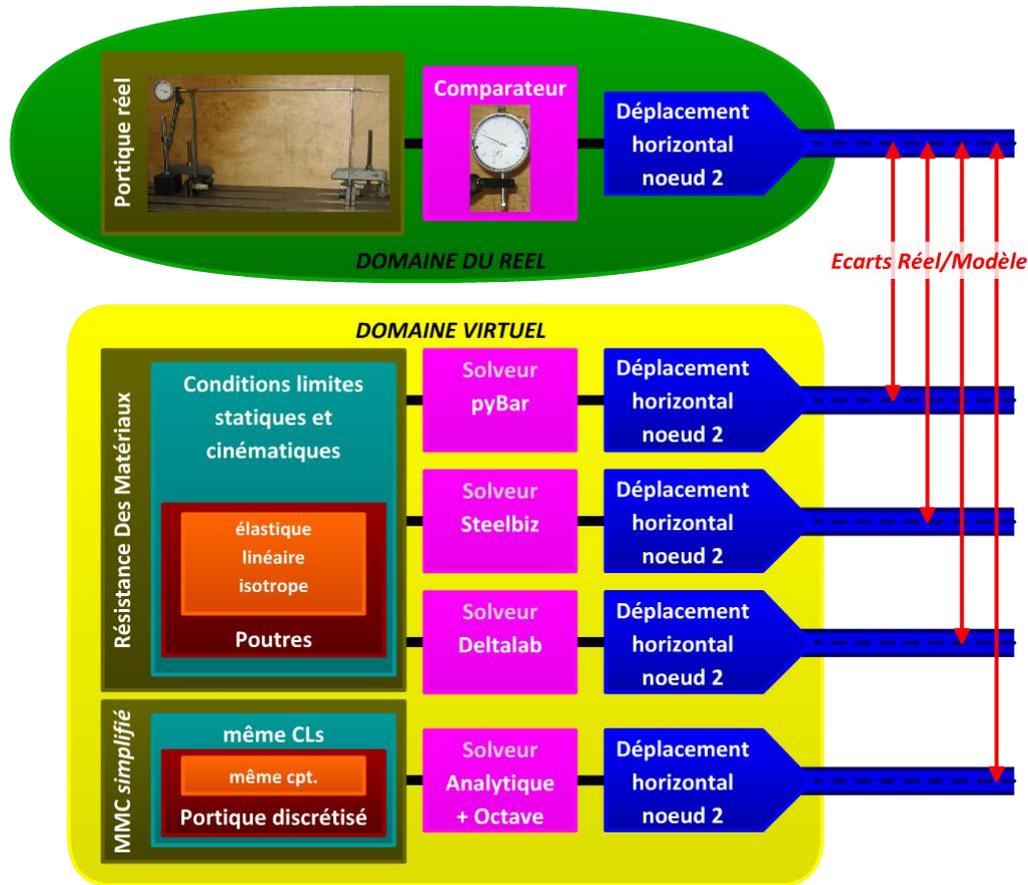


Figure 9 : Démarche de modélisation du portique et de validation des modèles

5.1 - Cas de chargement 1

Les résultats de l'expérimentation et des simulations sont résumés dans le tableau ci-dessous. Pour ce premier cas de chargement, seul le déplacement horizontal du nœud 2 fait l'objet d'une validation.

F (en N)	Expérience	Octave	pyBar	Steelbiz	Deltalab
10	0,36	0,3917437	0,39	0,39	0,39
20	0,8	0,7834874	0,78	0,78	0,78
30	1,19	1,1752310	1,18	1,18	1,18
40	1,55	1,5669747	1,57	1,57	1,57
50	1,96	1,9587184	1,96	1,96	1,96
60	2,4	2,3504621	2,35	2,35	2,35

On remarque une quasi-similitude entre les résultats des simulations par la RdM ou par les éléments finis (écarts de l'ordre de 0,1%), et une très bonne concordance avec les résultats expérimentaux (écarts de 1 à 2%). On peut donc considérer les différents modèles comme validés.

5.2 - Cas de chargement 2

Les résultats de l'expérimentation et des différentes simulations sont résumés dans le tableau ci-dessous.

F (en N)	Expérience	Octave	pyBar	Deltalab
10	-0,31	-0,254	-0,25	-0,25
20	-0,6	-0,508	-0,51	-0,51
30	-0,86	-0,762	-0,76	-0,76
40	-1,13	-1,02	-1,02	-1,02
50	-1,43	-1,27	-1,27	-1,27
60	-1,69	-1,52	-1,52	-1,52
70	-1,97	-1,78	-1,78	-1,78
80	-2,24	-2,03	-2,03	-2,03

Là encore, on remarque une quasi-similitude entre les résultats des simulations. Toutefois, les résultats expérimentaux donnent une flèche plus importante d'environ 10%. Cet écart est non négligeable et traduit manifestement une « erreur de modélisation », c'est-à-dire une mauvaise représentation dans le modèle d'un phénomène physique se produisant sur le portique réel.

Par exemple, la fixation des deux poteaux à l'aide d'étaux peut être délicate à modéliser : si les étaux ne sont pas suffisamment serrés, la représentation par une liaison encastrement n'est plus valable. Le positionnement vertical des poteaux dans l'étau peut également influencer sur la longueur libre, qui doit correspondre à la hauteur h introduite dans le modèle...

Il ne s'agit naturellement pas de la seule source d'erreur possible ; il conviendrait de contrôler attentivement le montage expérimental et, en cas de doute sur un paramètre du modèle théorique, de le recalibrer à partir des résultats des essais.

6. Conclusion

Cette ressource illustre la démarche de la modélisation d'un produit industriel au moyen de diverses techniques, et de la validation d'un modèle par des essais.

Références :

[1]: <http://www.dgm.ens-cachan.fr/>

[2]: <http://open.btp.free.fr/?/pyBar/>

[3]: <https://www.cticm.com/steelbizfrance.html/prog/portique.asp>

Ressource publiée sur Culture Sciences de l'ingénieur : <http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay>