

# Introduction à la simulation par éléments finis

Lionel GENDRE

école \_\_\_\_\_  
normale \_\_\_\_\_  
supérieure \_\_\_\_\_  
paris – saclay \_\_\_\_\_

Édité le 10/01/2013

Les éléments finis sont une technique de discrétisation qui permet de transformer une théorie « continue » conduisant à des problèmes mathématiques insolubles, comme par exemple la physique des milieux continus, en une théorie « discrète » conduisant à de simples systèmes d'équations que l'on sait résoudre. Cette transformation repose sur des hypothèses fortes, qui réduisent le domaine de validité de la théorie et qui doivent donc être bien comprises. Les logiciels de simulation par éléments finis sont de plus en plus utilisés dans l'enseignement des sciences de l'ingénieur, notamment au lycée. Cependant, ils font appel à des théories et des méthodes relativement sophistiquées, qui rendent l'interprétation de leurs résultats difficile à ce niveau.

Cette ressource, principalement destinée aux non-spécialistes, présente les différents concepts que doit connaître un enseignant pour comprendre les simulations par éléments finis et en interpréter les résultats.

## 1 – Enseigner les éléments finis ?

La simulation par éléments finis, autrefois réservée aux filières post-baccalauréat, est de plus en plus utilisée dans l'enseignement des sciences de l'ingénieur au lycée. Elle fait maintenant partie intégrante des programmes des classes de première et terminale STI2D et S option SI, qui précisent que les lycéens doivent être capables d'interpréter et de critiquer les résultats fournis par les logiciels.

Or, la théorie des éléments finis repose sur des notions mathématiques enseignées bien après le baccalauréat, et notamment sur l'étude des équations aux dérivées partielles. Il est donc impossible pour un lycéen de comprendre de façon déductive « pourquoi » le logiciel donne tel type de résultat. En revanche, il est possible de découvrir les éléments finis à l'aide d'une pédagogie par l'action. Pour mettre en œuvre cette démarche, les enseignants doivent être eux-mêmes capables de :

- Conduire une simulation par éléments finis de façon pertinente, en effectuant des choix judicieux à chaque étape ;
- En interpréter les résultats en fonction des choix précédemment effectués.

Cette compétence nécessite une bonne compréhension des concepts qui sous-tendent la simulation par éléments finis. Cette ressource, principalement destinée aux enseignants ayant une faible expérience des logiciels d'éléments finis, se propose de présenter ces différents concepts, et de montrer comment ceux-ci s'articulent au cours de la simulation.

Notons bien que les ressources de ce site ne sont pas des cours d'éléments finis et ne s'attardent ni sur l'étude des problèmes théoriques qui sous-tendent ces simulations, ni sur la description mathématique détaillée des procédures programmées dans les logiciels : nous nous limitons ici au minimum nécessaire, et renvoyons le lecteur désireux d'approfondir ces deux aspects vers les nombreux cours en ligne consacrés à ces thèmes. Par ailleurs, cette ressource traitant de l'application des éléments finis à la mécanique des solides déformables, nous supposons acquises

les bases de la mécanique des milieux continus ; là encore, nous invitons le lecteur à consulter l'un des nombreux cours dédiés à cette discipline si une notion évoquée ici lui fait défaut.

## 2 - Quelques concepts généraux

La simulation par éléments finis ou « méthode des éléments finis », au sens premier du terme, désigne un ensemble de techniques numériques permettant de résoudre approximativement une certaine classe de problèmes mathématiques, basés sur des équations aux dérivées partielles, dont on ne sait généralement pas trouver les solutions exactes. Il s'agit d'un outil mathématique qui possède de nombreuses applications, allant de la physique des milieux continus au calcul de probabilités.

Dans cette ressource, nous nous intéressons à son application la plus courante : la simulation du comportement des pièces mécaniques (ou structures) modélisées à l'aide de la mécanique des milieux continus solides, c'est-à-dire le calcul des déplacements, déformations, contraintes et efforts prédits par cette théorie (figure 1). L'utilisation des éléments finis dans d'autres branches de la physique des milieux continus (comme la thermique) est toutefois assez similaire.

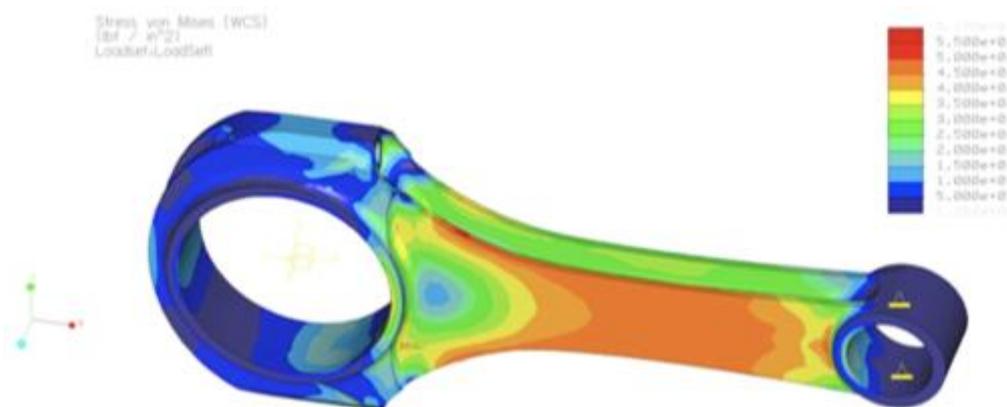


Figure 1 : Un exemple de champ de contraintes calculé dans une simulation par éléments finis  
Image LN Engineering

### 2.1 - La théorie : la discrétisation et les fonctions de base

Comme toute simulation, la simulation par éléments finis repose sur une théorie, c'est-à-dire un ensemble de lois, hypothèses, théorèmes... permettant d'exprimer un résultat en fonction de données de départ ; c'est dans le cadre de cette théorie que les modèles et les résultats sont définis, et il est donc important d'en avoir au moins une vue d'ensemble.

Ici, la théorie retenue est issue de la mécanique des milieux continus par une transformation nommée discrétisation. Toutes les théories de la mécanique des milieux continus peuvent être ainsi discrétisées, qu'il s'agisse de la version générale 3D, de simplifications 2D (contraintes planes, déformations planes, axisymétrie...) ou encore des théories des poutres, plaques ou coques.

La discrétisation de la mécanique des milieux continus repose sur deux modifications :

- Une hypothèse cinématique supplémentaire sur l'allure du champ de déplacement, qui est recherché sous la forme d'une combinaison linéaire (inconnue) de fonctions de base connues, définies dans la suite de cette ressource ;
- Une transformation des équations d'équilibre du milieu continu, destinée à les rendre mathématiquement compatibles avec l'hypothèse supplémentaire que l'on vient d'introduire.

Par conséquent, les lois utilisées au cours d'une simulation par éléments finis ne sont pas exactement les lois de la mécanique des milieux continus : il s'agit de lois discrétisées, donc différentes, qui conduisent ainsi à des solutions différentes. C'est pourquoi on dit généralement que les éléments finis sont une technique de résolution approchée des équations aux dérivées partielles.

La discrétisation et les fonctions de base ont naturellement une influence considérable sur la modélisation, qui s'effectue dans le cadre théorique décrit ci-dessus, et sur le résultat, qui ne sera pertinent que si les fonctions de base sont capables de représenter un champ de déplacement réaliste. Nous allons voir que les fonctions de base sont définies en fonction du modèle du produit ; cette définition, ainsi que son influence sur le résultat, sont présentées plus en détail dans la ressource « *Résolution d'un modèle éléments finis : 1. Du modèle aux équations* ».

## 2.2 - Le modèle du produit ou maillage

Dans une simulation par éléments finis, le produit est modélisé par un maillage, dont la définition s'appuie sur deux objets géométriques. Le premier est un découpage du domaine géométrique occupé par le produit en sous-domaines de formes simples. Ces sous-domaines sont tridimensionnels (volumes), bidimensionnels (surfaces) ou unidimensionnels (lignes), selon la théorie dans laquelle on se place (par exemple, en mécanique des milieux continus 3D, ce sont des volumes, mais en théorie des poutres, il s'agit de lignes). Quelques exemples de découpages 2D et 3D sont représentés sur la figure 2.

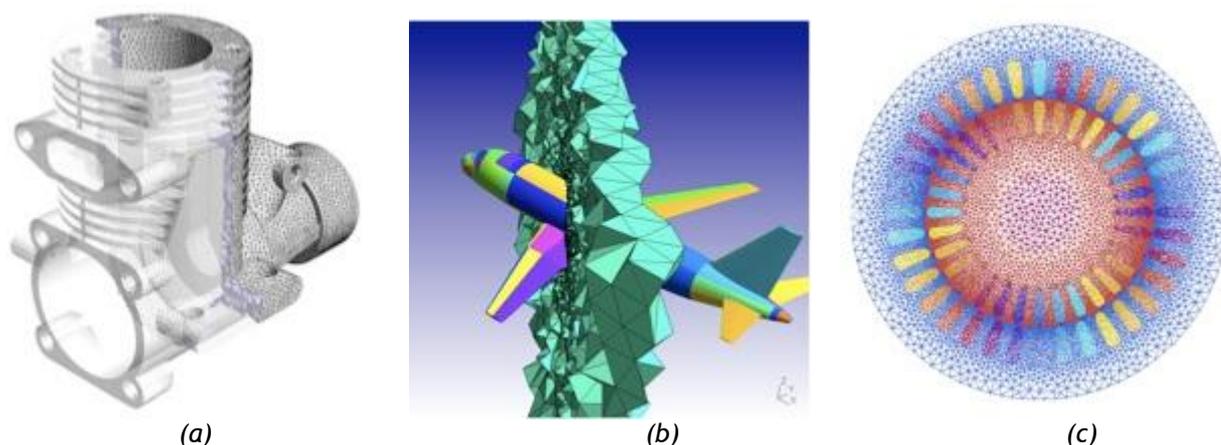


Figure 2 : Exemples de découpages géométriques appartenant à des maillages :  
(a) le carter d'un moteur (pour une simulation de mécanique des milieux continus 3D),  
(b) une partie du volume d'air entourant un avion (pour une simulation d'acoustique 3D),  
(c) un modèle plan d'un moteur électrique (pour une simulation d'électromagnétisme 2D).  
Images site du mailleur libre Gmsh

Le deuxième objet est une liste de points particuliers, situés aux sommets des sous-domaines ainsi que, quelquefois, aux milieux de leurs arêtes : les nœuds (figure 3).

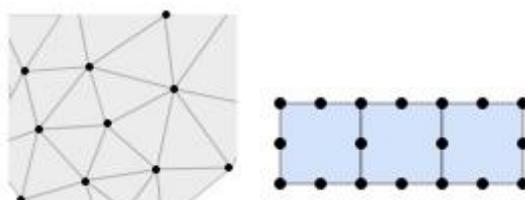


Figure 3 : Deux maillages plans avec leurs nœuds.

Les sous-domaines et les nœuds servent à définir les fonctions de base (utilisées pour représenter le champ de déplacement). Ces fonctions sont en effet définies par morceaux, dans chaque sous-

domaine, et chacune d'entre elles est associée à un nœud. Elles sont construites de sorte à réaliser une interpolation du champ de déplacement à partir de valeurs discrètes définies aux nœuds ; cette interpolation est souvent affine ou quadratique par morceaux (figure 4) bien que le cas général soit plus compliqué. La nature de l'interpolation dépend des sous-domaines, qui sont choisis par l'utilisateur ; la construction des fonctions réalisant cette interpolation est, quant à elle, réalisée automatiquement par le logiciel.



Figure 4 : Deux interpolations simples d'un champ de déplacement 1D (issu de la théorie des poutres, par exemple) : (a) avec des fonctions affines par morceaux, (b) avec des fonctions quadratiques par morceaux.

Un sous-domaine muni de ses nœuds et de leurs fonctions de base s'appelle un élément fini, ou simplement élément ; les éléments sont les « briques » à l'aide desquelles on modélise le produit. En pratique, les logiciels de simulation possèdent des bibliothèques d'éléments dans lesquelles l'utilisateur peut piocher, qui se distinguent notamment par leurs topologies et le nombre de leurs nœuds (figure 5) ; l'utilisateur peut généralement spécifier la forme des éléments en positionnant leurs nœuds afin de s'adapter à la géométrie à modéliser, et le logiciel adapte automatiquement la définition des fonctions de base de façon transparente pour l'utilisateur. La ressource « *Quelques types d'éléments finis* » permet d'aller plus loin dans la présentation de quelques éléments courants, ainsi que leurs fonctions de base.

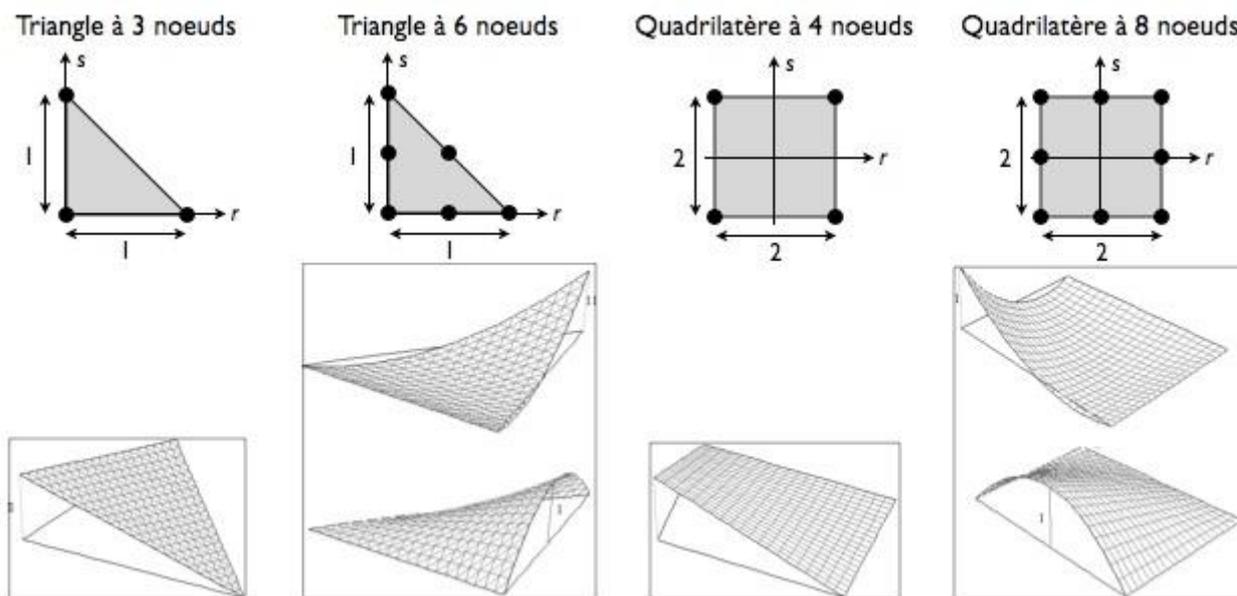


Figure 5 : Quelques types d'éléments bidimensionnels courants.

Le maillage est ainsi constitué d'un nuage de nœuds, ainsi que d'éléments s'appuyant sur ces nœuds ; la plupart des logiciels peuvent assister l'utilisateur en construisant automatiquement un maillage à partir d'un domaine géométrique, issu par exemple d'un fichier CAO. Il faut pour cela leur indiquer le type et la taille des éléments, ce qui nécessite de bien comprendre l'influence de ces paramètres.

Schématiquement, le maillage joue deux rôles essentiels dans la simulation. Premièrement, il détermine le modèle géométrique du produit, obtenu en réunissant les différents sous-domaines.

Deuxièmement, il détermine également l'allure du champ de déplacement, et donc de déformation et de contrainte, par l'intermédiaire des fonctions de base. Ainsi, le maillage influe fortement sur la pertinence des résultats et doit donc être réalisé avec soin. Les quatre ressources « Le modèle en éléments finis d'un produit dans son environnement » présente les différentes étapes de sa réalisation.

### 2.3 - Le modèle de l'environnement : efforts et déplacements imposés

En éléments finis, tout comme en mécanique des milieux continus, l'action de l'environnement sur le produit est modélisée par des efforts extérieurs et des déplacements imposés (nous laissons de côté les modélisations plus complexes comme les contacts avec décollement et/ou frottement, ou encore les liaisons élastiques). Cependant, le formalisme mathématique utilisé pour représenter ces modèles n'est pas le même qu'en mécanique des milieux continus : il est adapté à la discrétisation. L'écriture de la théorie discrétisée montre qu'en éléments finis, les déplacements et les efforts sont représentés par des quantités nodales :

- Le champ de déplacement est interpolé à partir de ses valeurs aux nœuds, dites déplacements nodaux ;
- Les équations d'équilibre ne portent plus sur le champ de contrainte, mais sur des efforts nodaux définis à l'aide du principe des travaux virtuels.

Le modèle de l'environnement doit donc être écrit sous forme de déplacements nodaux imposés et d'efforts nodaux extérieurs (figure 6).



Figure 6 : Modélisation de l'environnement par éléments finis :  
(a) efforts nodaux extérieurs, (b) déplacements nodaux imposés.

Ce formalisme étant peu intuitif (voir figure 7) les logiciels proposent des bibliothèques de modèles courants issus pour la plupart de la mécanique des milieux continus : l'utilisateur spécifie les valeurs numériques associées à ces modèles, et le logiciel calcule alors automatiquement les efforts ou déplacements nodaux correspondants. Par exemple, une action de contact pourra être modélisée par une distribution de pression (figure 7a) que le logiciel traduit ensuite en efforts nodaux (figure 7b).



Figure 7 : (a) Une distribution de pression uniforme ;  
(b) les efforts nodaux correspondants. On constate que la répartition obtenue n'est pas très intuitive...

En pratique, la modélisation de l'action de l'environnement doit respecter deux contraintes. La première est que le modèle de l'environnement ne peut être quelconque : il est soumis à des exigences héritées de la statique des milieux continus, à savoir le blocage des mouvements de corps rigide et, le cas échéant, l'écriture des conditions de symétrie. Si ces exigences ne sont pas respectées, le calcul est impossible, ou les résultats sont faux. La deuxième est que certains des modèles proposés par les logiciels sont rarement pertinents du point de vue du sens physique, et

leur emploi entraîne fréquemment des écarts conséquents avec la réalité. Le respect de ces deux contraintes peut être une source de difficultés ; ces aspects sont précisés dans la ressource « Le modèle en éléments finis d'un produit dans son environnement : 4. Modélisation du monde extérieur ».

## 2.4 - Le calcul et l'analyse des résultats

Pour utiliser un logiciel de simulation par éléments finis, il faut modéliser le produit (c'est-à-dire réaliser un maillage) et l'action de son environnement (c'est-à-dire lui appliquer des efforts extérieurs et des déplacements imposés). Il faut également choisir un modèle du comportement du matériau, et l'attribuer aux éléments du maillage. A partir de ces modèles, le logiciel effectue ensuite un calcul qui se décompose en trois étapes (figure 8) :

1. Le logiciel construit un système d'équations, correspondant aux équations d'équilibre des nœuds et aux déplacements nodaux imposés, en exploitant les données des modèles : c'est le pré-traitement.
2. Le logiciel résout ce système d'équations, et obtient les déplacements nodaux et les efforts nodaux de liaison (correspondant aux déplacements imposés).
3. Le logiciel reconstruit alors les résultats qui lui sont demandés (il s'agit typiquement des champs de déplacement, de déformation et de contrainte) et, le cas échéant, les traite afin de les tracer à l'écran : c'est le post-traitement.

Le principe de ces trois étapes est présenté dans les deux ressources « Résolution d'un modèle éléments finis ».

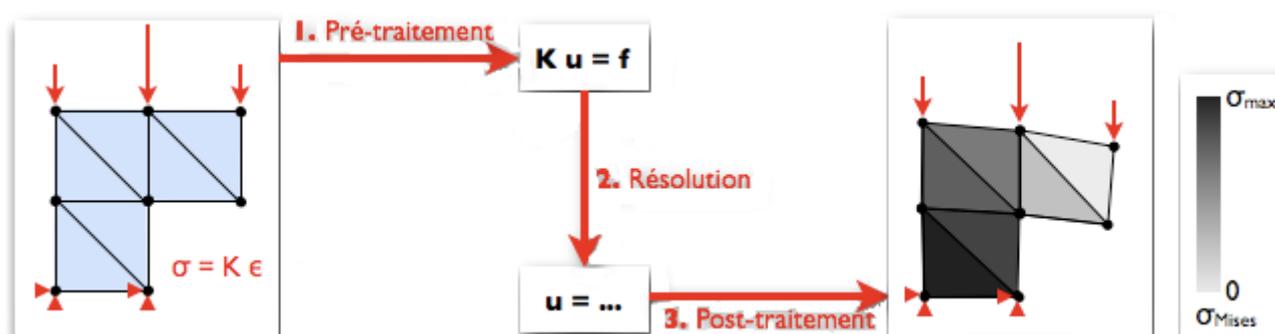


Figure 8 : Les trois étapes du calcul : pré-traitement, résolution et post-traitement.

Ce calcul est automatisé et s'effectue sans intervention de l'utilisateur ; il est cependant nécessaire de connaître son fonctionnement pour deux raisons. Premièrement, la théorie qui le sous-tend repose sur des hypothèses qui introduisent des restrictions supplémentaires sur les modèles : par exemple, le mode de calcul des intégrales sur les éléments n'est valable qu'à certaines conditions sur la forme de ceux-ci, et le non-respect de ces conditions entraîne au mieux un message d'erreur, au pire des résultats faux. Deuxièmement, le post-traitement (la dernière étape) peut parfois altérer les résultats de façon significative, en masquant certaines anomalies caractéristiques ; or, ces anomalies sont justement un symptôme d'une modélisation non pertinente, et le fait de les masquer peut compliquer singulièrement l'analyse critique des résultats, sans pour autant rendre ceux-ci plus représentatifs de la réalité.

## 2.5 - Une attention particulière à la qualité des résultats

Comme dans toute simulation, les résultats d'une simulation par éléments finis présentent toujours un écart avec la réalité, dont les causes peuvent être classées en deux catégories : la modélisation, c'est-à-dire le passage du réel à un problème mathématique défini dans le cadre d'une théorie, et les fautes dans l'application des règles de la théorie qui permettent de résoudre

ce problème pour parvenir au résultat. Nous supposons ici qu'il n'y a pas de fautes et nous nous intéressons aux écarts dus à la modélisation par éléments finis.

Pour analyser ces écarts, il est commode de revenir à la définition première de la « méthode des éléments finis », c'est-à-dire de voir celle-ci comme une technique de résolution approchée d'un problème de mécanique des milieux continus. Cela conduit à considérer que les modèles par éléments finis du produit, de l'environnement et du comportement du matériau sont issus de modèles continus et, par conséquent, à classer les sources d'écart relevant de la modélisation en deux catégories :

- La modélisation continue, c'est-à-dire le passage de la réalité à un ensemble de modèles définis dans le cadre de la mécanique des milieux continus, définissant un « problème continu » insoluble ;
- Et la discrétisation, c'est-à-dire la transformation des lois de la mécanique des milieux continus en lois « discrètes » dont la définition précise dépend des fonctions de base, c'est-à-dire du maillage ; cela transforme du même coup le "problème continu" insoluble en un « problème discret » soluble.

Il s'agit naturellement d'une vue de l'esprit : en pratique, les utilisateurs modélisent directement le produit, son environnement et le comportement du matériau sous la forme demandée par le logiciel, sans passer par l'écriture académique d'un « problème continu » et de sa discrétisation. Ce point de vue permet cependant d'expliquer une différence fondamentale entre ces deux types d'écarts.

En effet, la discrétisation est une transformation purement théorique, étudiée par les mathématiques. Il existe ainsi des théorèmes décrivant l'écart dû à la discrétisation (, bien que le résultat continu lui-même soit impossible à déterminer. L'intérêt pratique de ces théorèmes est double :

- D'une part, ils sont à la base d'outils et de méthodes semi-empiriques permettant d'estimer cet écart (ou au moins son ordre de grandeur) par le calcul,
- Et d'autre part, ils assurent que cet écart peut être réduit autant que voulu à condition d'adapter la discrétisation, c'est-à-dire de raffiner suffisamment le maillage.

Par conséquent, un utilisateur expérimenté peut maîtriser l'écart dû à la discrétisation sans effectuer aucune expérimentation (mais à condition d'avoir du temps devant lui et de disposer d'un ordinateur suffisamment puissant pour atteindre la précision souhaitée !), comme l'explique la ressource « *Estimation de l'écart dû à la discrétisation par éléments finis* ».

Il en va tout autrement en ce qui concerne la modélisation proprement dite, c'est-à-dire le passage du réel aux modèles : bien que le domaine de validité de certains modèles soit connu avec précision, l'écart dû à la modélisation n'est pas toujours prévisible sans recourir à l'expérimentation. En effet, cet écart résulte de multiples causes : présence d'incertitudes ou de variabilités, de simplifications... qui sont, par définition, non prises en compte lors de la modélisation, et son estimation nécessite de l'expérience et du savoir-faire.

La réalisation d'une simulation par éléments finis suit une démarche synthétisée dans l'« Annexe : Les principales étapes de la simulation par éléments finis ». On peut aussi trouver une vision synthétique, sous la forme de schéma bloc, de la démarche suivie lors de la simulation du comportement d'un produit dans son environnement dans la ressource « *La simulation du comportement des produits industriels* ».

Ressource publiée sur EDUSCOL-STI : <http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-cachan/>