

Cette ressource a été créée dans le cadre des projets didactiques de première année du Département de Génie Mécanique de l'ENS de Cachan [1].

Elle illustre l'utilisation d'un plan d'expériences dans le cadre d'un procédé de fabrication : il s'agit de déterminer expérimentalement les conditions d'usinage permettant de minimiser la rugosité de pièces produites en série.

Il s'agit d'une ressource applicative, ne comportant que de brefs rappels sur la méthode ; il est donc conseillé de prendre préalablement connaissance de la ressource « *Les plans d'expériences* ».

## 1 - Quelques rappels

### 1.1 - La rugosité

La rugosité est une grandeur caractérisant un état de surface. Plus particulièrement, il s'agit d'une mesure des *défauts de tailles caractéristiques inférieures à 0,5 mm*, tels que les stries ou les sillons dus aux passages de l'outil lors des différentes phases d'usinage d'une pièce, ou les arrachements de matières localisés.

Ces défauts sont mesurés à partir d'un *profil de surface*. La figure 1 représente un exemple de profil relevé sur une surface réputée plane.

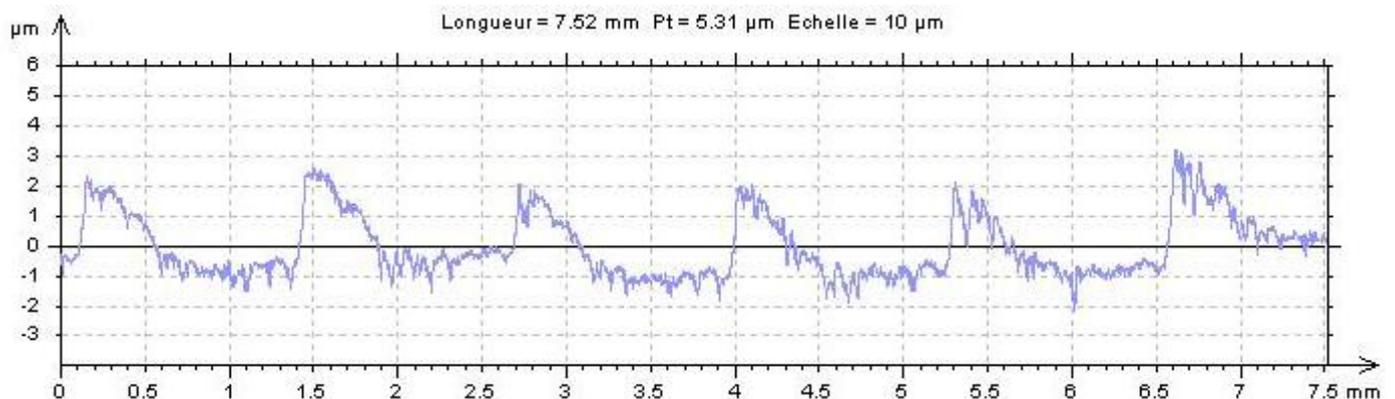


Figure 1 : Profil de rugosité redressé

Pour accéder à la rugosité, il faut soustraire les ondulations « lentes », de longueur caractéristique supérieure à 0,5 mm, dues par exemple aux vibrations de la machine d'usinage : voir figure 2. Il en résulte le profil de la figure 3.

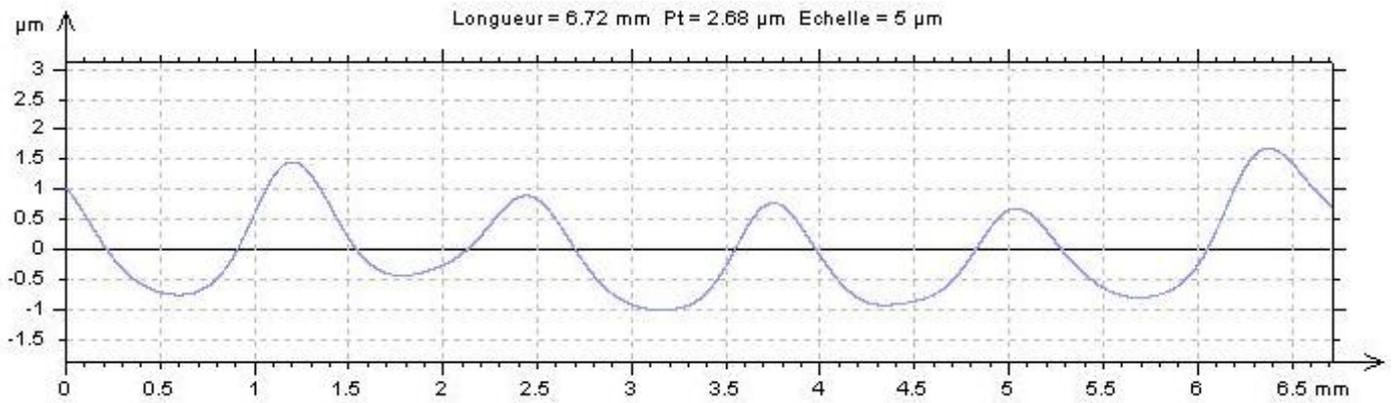


Figure 2 : Ondulation du profil

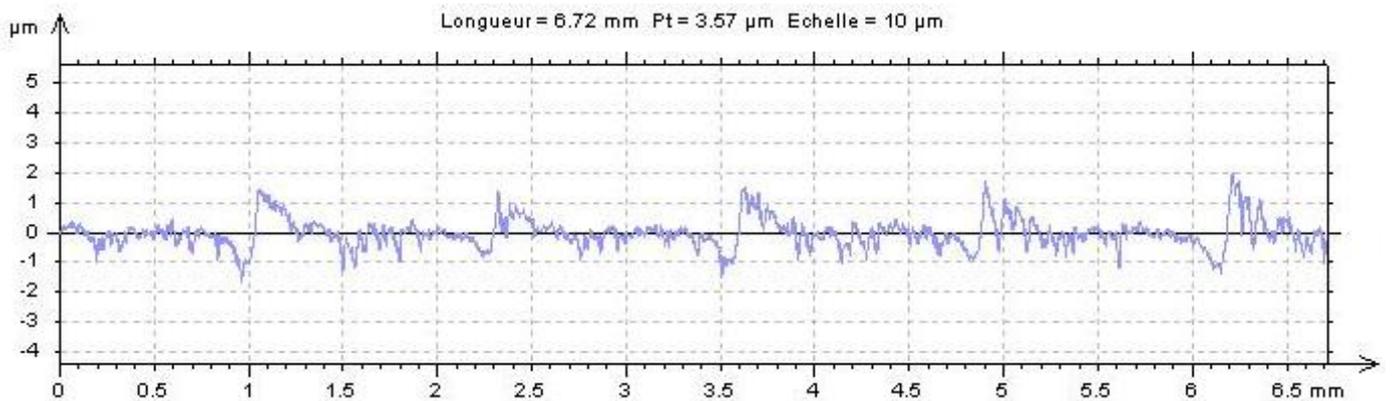


Figure 3 : Profil final

Ce profil ne contient plus que des ondulations à faible longueur de variation. Il définit donc la rugosité de la pièce. Divers indicateurs peuvent être utilisés pour quantifier cette rugosité ; ici, nous considérons la **rugosité arithmétique**, définie par la relation suivante :

$$R_a = \int |s(t)| dt$$

Le cahier des charges d'une pièce spécifie souvent une valeur de la rugosité arithmétique à ne pas dépasser, en particulier pour les surfaces en contact avec une autre pièce.

## 1.2 - Les plans d'expérience

Nous rappelons seulement les principales définitions ; le lecteur se reportera à la ressource « *Les plans d'expériences* » pour un exposé plus détaillé.

- **Réponse** : c'est la grandeur mesurée lors des essais (ici, la rugosité arithmétique).
- **Facteurs** : ce sont les paramètres que l'on fait varier au cours des essais, afin d'identifier leur influence sur la réponse.
- **Niveau** : c'est la valeur prise par un facteur au cours d'un essai.
- **Modèle de comportement** : il s'agit de la relation mathématique permettant d'exprimer la réponse en fonction des niveaux des facteurs. La démarche consiste habituellement à postuler un modèle (affine, quadratique, avec ou sans interactions...) puis à en identifier les termes et coefficients à l'aide des essais.
- **Interaction** : c'est la dépendance de l'influence d'un facteur en fonction du niveau des autres facteurs. Une interaction peut être double (l'influence de A sur la réponse dépend du niveau de B) ou d'ordre plus élevé (l'influence de A dépend du niveau de B, C, D... de manière conjuguée) ; en pratique, les modèles de comportement employés se limitent souvent aux interactions doubles.

En ce qui concerne l'exploitation des résultats des essais, les quantités suivantes sont utilisées :

- *Moyenne générale* : elle correspond à la moyenne de la réponse sur les  $m$  essais.

$$M = \frac{\sum_{i=1}^m Y_i}{m}$$

- *Effet d'un facteur* : l'effet  $E_{A_j}$  du facteur  $A$  au niveau  $j$  correspond à la moyenne des réponses lorsque le facteur  $A$  est au niveau  $j$  soustrait de la moyenne  $M$ .

$$E_{A_j} = (\text{Moyenne des réponses lorsque } A_j \text{ est au niveau } j) - M$$

*Remarque* : la somme des effets d'un facteur à tous ses niveaux est nulle.

$$\sum_{j=1}^{n_{A_i}} E_{A_j} = 0$$

- *Effet d'une interaction* : l'effet de l'interaction  $I_{A_i A_k l}$  entre le facteur  $A_i$  au niveau  $j$  et le facteur  $A_k$  au niveau  $l$  est donné par la moyenne des réponses lorsque  $A_i$  est au niveau  $j$  et  $A_k$  est au niveau  $l$  à laquelle on soustrait l'effet  $E_{A_j}$ , l'effet  $E_{A_k l}$  et la moyenne  $M$ .

$$I_{A_i A_k l} = (\text{Moyennes des réponses pour } A_i j \text{ et } A_k l) - E_{A_j} - E_{A_k l} - M$$

*Remarque* : la somme des effets d'une interaction à tous les niveaux de l'un ou l'autre des facteurs est nulle.

$$\sum_{j=1}^{n_{A_i}} I_{A_i A_k l} = 0$$

- *Graphe des effets des facteurs* : il s'agit d'une manière commode de représenter l'évolution de la réponse en fonction des niveaux des différents facteurs. Il consiste à tracer, pour chaque facteur, la *moyenne des réponses obtenues* lorsqu'il prend ses différents niveaux. L'exemple de la figure 4 correspond à un facteur  $A1$  à trois niveaux, un facteur  $A2$  à deux niveaux et un facteur  $A3$  à quatre niveaux.

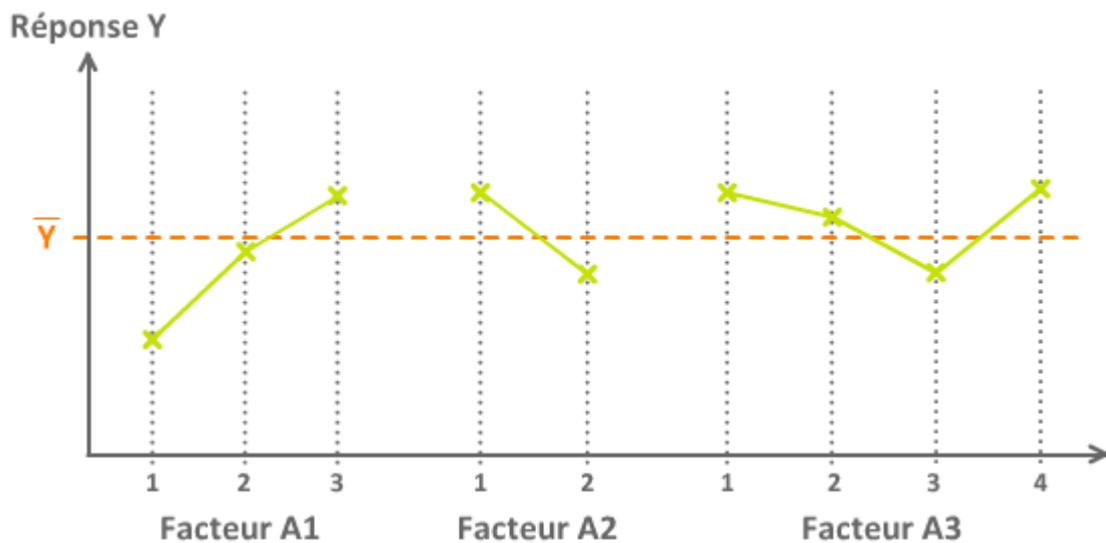


Figure 4 : Exemple de graphe des effets des facteurs

- *Graphe des effets des interactions* : il est construit sur le même principe que le graphe des effets des facteurs, à ceci près que l'on trace *plusieurs* courbes par facteur, correspondant aux effets moyens calculés *selon le niveau d'un autre facteur*. Des courbes confondues traduisent une interaction nulle ; des courbes très différentes traduisent une interaction forte. La figure 5 donne des exemples d'interactions entre deux facteurs à deux niveaux.

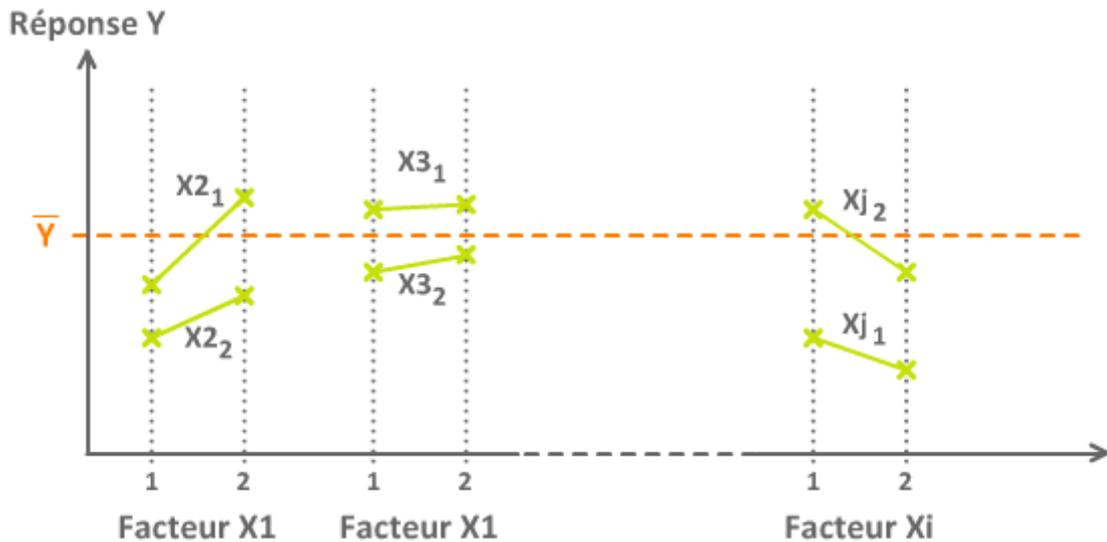


Figure 5 : Exemple de graphe des effets des interactions

## 2 - Mise en œuvre de la méthode

Nous considérons maintenant la mise en œuvre de la méthode des plans d'expérience pour minimiser la rugosité de pièces usinées. Il s'agit d'un cas typique d'utilisation de cette méthode : chaque essai est coûteux puisqu'il demande la fabrication d'une pièce et un contrôle par métrologie. Il est donc essentiel d'optimiser le coût et la fiabilité de l'étude expérimentale.

### 2.1 - Modélisation

La première étape est de mettre en place un modèle de comportement du « produit », c'est-à-dire ici du procédé d'usinage. Pour cela, il faut tout d'abord choisir les facteurs. De nombreux paramètres peuvent influencer sur l'état de surface de la pièce usinée ; on peut notamment citer les conditions de coupe :

- la vitesse de coupe
- l'avance
- la profondeur de passe
- la lubrification

... mais également les caractéristiques de la plaquette :

- le rayon de bec
- la géométrie de l'arête de coupe
- la qualité de la plaquette
- la nuance de la plaquette

... et les caractéristiques de la pièce :

- le type de matériau
- l'état de surface avant usinage
- l'état de déformation de la pièce

Cette liste n'est pas exhaustive mais décrit les principaux phénomènes jouant sur l'état de surface final.

Ici, afin que la complexité du modèle reste raisonnable, nous ne considérons que 5 facteurs parmi la liste ci-dessus, et affectons 2 niveaux à chacun d'entre eux. Ces facteurs et leurs niveaux sont définis dans le tableau ci-dessous.

Désignation	Repère	Niveau 1	Niveau 2
Rayon de bec de l'outil	A	0,4 mm	0,8 mm
Avance de l'outil	B	0,1 mm/tr	0,4 mm/tr
Vitesse de coupe	C	120 m/mn	250 m/mn
Profondeur de passe	D	0,5 mm	1 mm
Lubrification	E	Sans	Avec

La réponse est naturellement la rugosité arithmétique, exprimée en microns. Enfin, nous postulons que cette réponse dépend des différents facteurs de manière affine (chaque facteur n'ayant que deux niveaux, il est impossible d'identifier une dépendance d'ordre supérieur) et que l'effet des interactions d'ordre 3 ou plus est négligeable. Le modèle de comportement retenu est donc le suivant :

$$y = c + \sum_X e_X X + \sum_{X,Y} i_{XY} XY$$

où  $X$  et  $Y$  désignent les facteurs, pouvant correspondre à A, B, C, D ou E. Il y a donc un total de 16 coefficients à identifier : le terme constant  $c$ , les 5 termes « simples »  $e_X$  et les 10 termes « doubles »  $i_{XY}$ .

## 2.2 - Choix d'un plan d'expériences

Il faut maintenant choisir un plan d'expériences, c'est-à-dire une liste ordonnée d'essais permettant d'identifier les coefficients du modèle ci-dessus. Un plan factoriel complet comporterait  $2^5 = 32$  essais ; ce chiffre n'est pas insurmontable mais, dans un souci de réduire les coûts, nous allons plutôt employer un plan réduit. Nous choisissons ici la méthode de Taguchi pour sa simplicité, mais d'autres méthodes (comme celle de Box et Hunter) seraient également applicables.

Les plans d'expériences accordent une importance particulière à l'*ordre* dans lequel les essais sont réalisés. Il faut donc attribuer à ces 5 facteurs une difficulté de modification. Par exemple, dans le cas présent de l'usinage, il est plus facile de modifier la profondeur de passe ou la lubrification que de changer l'outil, car cette dernière opération nécessite une intervention manuelle avec arrêt de la machine, contrairement aux premières. L'attribution de ces difficultés est résumée dans le tableau ci-dessous.

Repère	Difficulté de modification
A	Très difficile
B	Difficile
C	Facile
D	Très facile
E	Très facile

La méthode de Taguchi consiste alors à choisir, dans un recueil de tables, le plan d'expériences le plus adapté au modèle employé. Ce modèle comporte 5 facteurs et 10 interactions, et chaque

facteur possède deux niveaux ; il se trouve que cette configuration correspond exactement à la table dite  $L_{16}(2^{15})$ , que le lecteur pourra consulter « *Annexe : Rugosité Taguchi.xls* ». Cette table est accompagnée des 3 graphes linéaires de la figure 6.

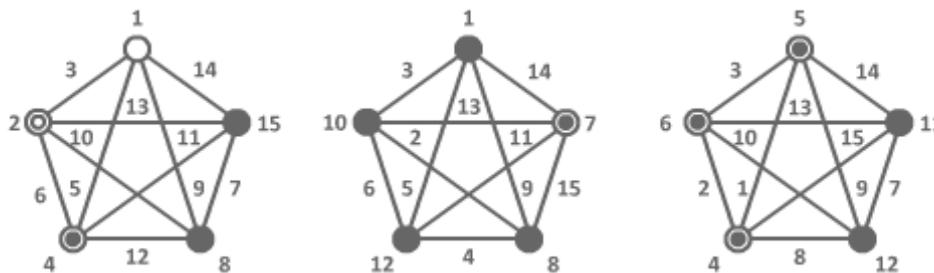


Figure 6 : Graphes associés à la table  $L_{16}(2^{15})$  de Taguchi

On rappelle que plus le cercle est rempli, plus le facteur est modifié fréquemment ; au vu de la répartition des difficultés, le premier graphe semble donc être le mieux adapté à l'étude, et une attribution possible des colonnes de la table est la suivante :

Repère	A	B	C	D	E
Colonne	1	2	4	15	8

La table de Taguchi donne alors directement la liste ordonnée des essais à réaliser.

### 2.3 - Identification des coefficients du modèle

Nous ne présentons ici que les calculs strictement nécessaires à la compréhension de la démarche. L'exploitation complète des résultats est disponible « *Annexe : Rugosité Taguchi.xls* ».

Le plan d'expériences utilisé comporte 16 essais dont les résultats sont donnés ci-dessous :

Essai	Y
1	1,79
2	1,61
3	1,51
4	1,07
5	3,85
6	4,81
7	5,54
8	5,47
9	3,25
10	4,71
11	1,65
12	1,18
13	4,84
14	2,60
15	5,50
16	5,47

La moyenne générale des 16 essais est  $M = 3,43$ . Les effets des différents facteurs sont représentés graphiquement sur la figure 7.

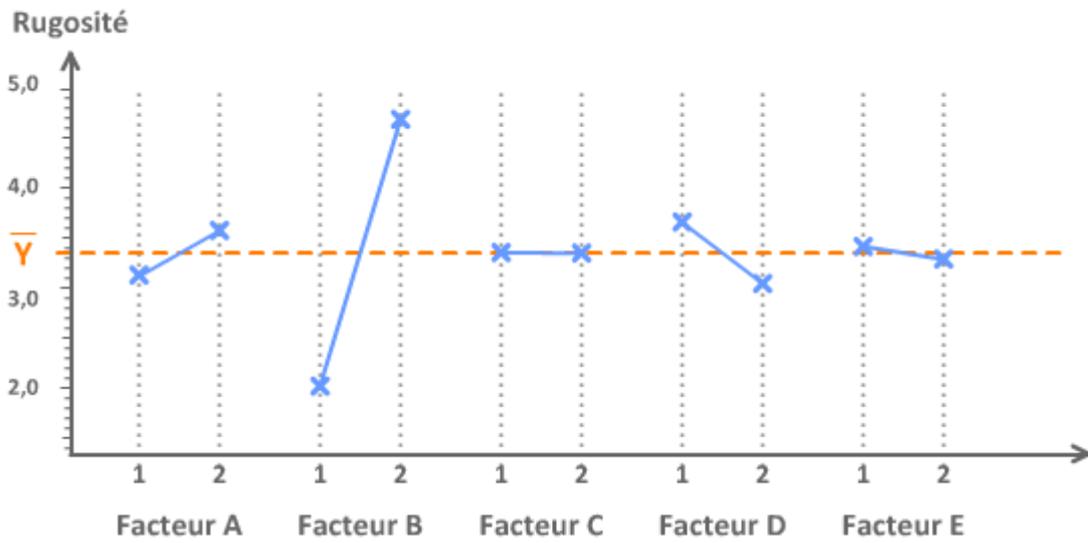


Figure 7 : Graphe des effets des facteurs sur la rugosité

Enfin, les effets des interactions sont représentés sur les figures 8 et 9.

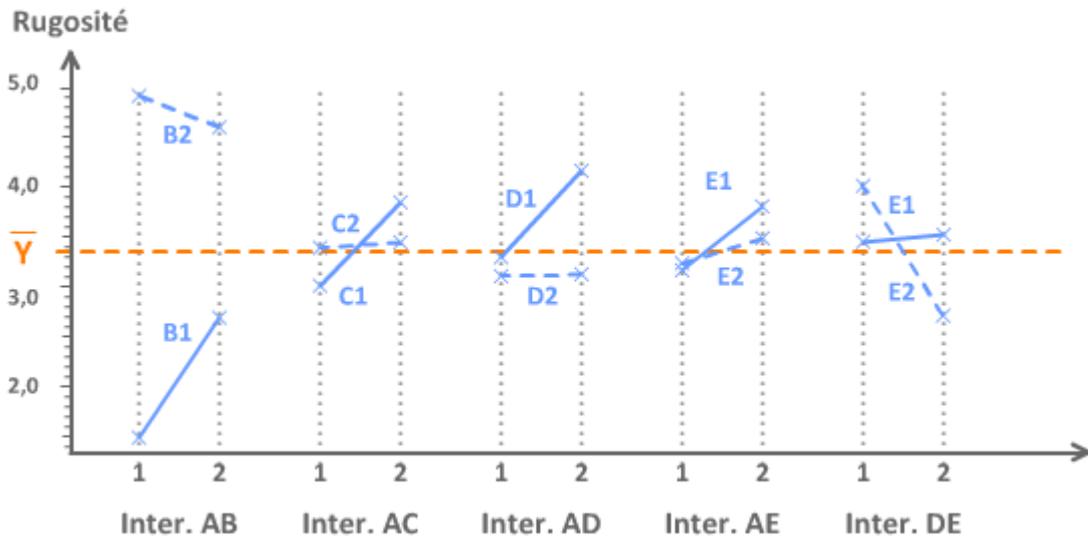


Figure 8 : Graphe des effets des interactions sur la rugosité

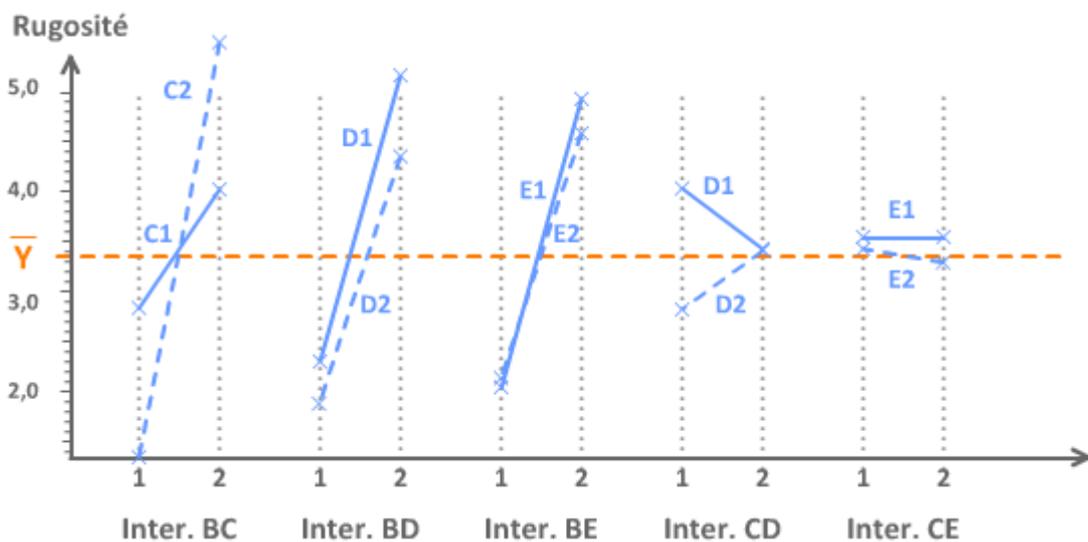


Figure 9 : Graphe des effets des interactions sur la rugosité (suite)

Le modèle utilisé est affine, avec deux niveaux par facteur. Les coefficients du modèle sont donc directement donnés par les valeurs des effets.

De plus, le modèle comporte 16 termes, et le plan d'expériences utilisé comporte 16 essais. On obtient donc un modèle passant exactement par les résultats des essais ; l'avantage est que l'on a utilisé le nombre minimal d'essais possible, l'inconvénient est qu'il n'est pas possible de tester la validité du modèle sans faire d'essais supplémentaires (typiquement, si une ou plusieurs interactions d'ordre élevé jouent un rôle significatif, nous le pourrions pas le voir avec ce plan d'expériences : c'est le phénomène d'alias).

## 2.4 - Minimisation de la rugosité

Nous pouvons maintenant utiliser le modèle pour répondre à la question posée au début de l'étude, c'est-à-dire sélectionner les conditions d'usinage permettant de minimiser la rugosité. Il s'agit d'un problème classique d'optimisation ; ici, compte tenu du faible nombre de facteurs et des ordres de grandeurs des différents effets, une résolution graphique, c'est-à-dire sans écrire d'équations, est possible.

L'examen de l'effet de B (figure 7) ainsi que des interactions AB (figure 8), BC, BD et BE (figure 9) montre que B est de loin le facteur le plus influent, et que la rugosité est toujours plus faible lorsque le niveau de B est à 1, quels que soient les niveaux des autres facteurs. *Nous fixons donc le niveau de B à 1.*

Etudions maintenant l'effet du facteur A. On constate que lorsque B est fixé à 1, la rugosité est toujours plus faible lorsque A est au niveau 1, quels que soient les niveaux de C, D et E (voir figures 7 et 8). *On peut donc fixer le niveau de A à 1.*

De la même manière, on montre que la rugosité est presque toujours plus faible lorsque D est au niveau 2. La seule exception est l'interaction DE : lorsque E est au niveau 1, le passage de D au niveau 2 entraîne une très légère augmentation de la rugosité. Cependant, cette augmentation est complètement négligeable devant la diminution provenant des autres effets. *Nous fixons donc le niveau de D à 2.*

Un raisonnement similaire s'applique au facteur E. Compte tenu des niveaux des autres facteurs, l'effet de E seul et des interactions DE et CE nous incitent à fixer E à 2, tandis que les interactions AE et BE montrent au contraire une augmentation de la rugosité lorsque E est au niveau 2. Cependant, là encore, cette augmentation est négligeable devant la diminution due aux autres effets, et *nous fixons donc le niveau de E à 2.*

Enfin, seul le facteur C reste à fixer. Sa détermination graphique est difficile car compte tenu des niveaux des autres facteurs, les effets des diverses interactions sont contradictoires et semblent se compenser. Pour y voir plus clair, nous calculons donc l'effet total de C, par exemple au niveau 1 :

$$Et_{C1} = E_{C1} + I_{A1C1} + I_{B1C1} + I_{D2C1} + I_{E2C1} = 0,314$$

L'effet total de C<sub>1</sub> est positif. Comme l'effet total de C<sub>2</sub> est son opposé, il vaut mieux *fixer le facteur C au niveau 2* pour que son effet diminue la rugosité.

L'« Annexe : Exploitation des résultats des différents essais » décrit le déroulement de l'exploitation des résultats.

Au final, les paramètres retenus pour avoir une rugosité minimale sont donc les suivants :

Facteur	Niveau	Valeur
Rayon de bec de l'outil	1	0,4 mm
Avance de l'outil	1	0,1 mm/tr
Vitesse de coupe	2	250 m/mn
Profondeur de passe	2	1 mm
Lubrification	2	Avec

La rugosité arithmétique prédite par le modèle est alors  $R_A = 0,98$ , qui est bien inférieure à l'ensemble des résultats des essais. Comme le nombre d'essais effectué n'a pas permis de tester la validité du modèle, il conviendrait de vérifier expérimentalement cette valeur lors de la mise en place définitive du procédé d'usinage.

### 3 - Conclusion

Le plan d'expériences mis en place ici a permis d'identifier les conditions d'usinage conduisant à une rugosité minimale. Cet exemple montre que l'application de la méthode (ici, à l'aide d'une table de Taguchi) ne représente aucune difficulté particulière, et montre que dans les cas les plus simples, les valeurs souhaitées peuvent être trouvées « à la main », sans faire appel à des techniques mathématiques complexes.

### Références :

[1]: <http://www.dgm.ens-cachan.fr/>

Ressource publiée sur EDUSCOL-STI : <http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-cachan/>