CORRECTION EXERCICE 1
PARTIE A

1.

a) L'équation différentielle s'écrit : $x'(t) + 4kx(t) = 0$. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants homogène (second membre nulle). On sait que la solution générale en est :

$$t \mapsto x(t) = \lambda e^{-4kt}; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b)

$$x(0) = 1 \Rightarrow x(0) = 1 = \lambda e^0 \iff \lambda = 1$$

ainsi :

$$\begin{cases} x(t) & = & e^{-4kt} \\ x(0) & = & 1 \end{cases}$$

2.L'équation (2) s'écrit : $y'(t) + 3ky(t) = 4ke^{-4kt}$.
La solution de l'équation homogène asociée est

$$t \mapsto y_{ssm}(t) = Ae^{-3kt}; \quad A \in \mathbb{R}$$

3. Recherchons une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$t \mapsto y_p(t) = Be^{-4kt}; \quad B \in \mathbb{R}$$

On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_p'(t) + 3ky_p(t) = 4ke^{-4kt}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad -4Bke^{-4kt} + 3kBe^{-4kt} = 4ke^{-4kt}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad -Bke^{-4kt} = 4ke^{-4kt}$$

Par identification, on obtient : $B = -4$. D'où :

$$t \mapsto y_p(t) = -4e^{-4kt}$$

4. a) La solution générale de l'quation (2) est alors :

$$t \mapsto y(t) = y_{ssm}(t) + y_p(t)$$

soit

$$t \mapsto y(t) = Ae^{-3kt} - 4e^{-4kt}; \quad A \in \mathbb{R}$$

b) La condition $y(0) = 0$ conduit à :

$$0 = A - 4 \Longleftrightarrow A = 4$$

Ainsi,

$$\begin{cases} y(t) &= 4e^{-3kt} - 4e^{-4kt} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

PARTIE B

1. L'équation (4) donne pour $t = 0$:

$$\nu'(0) = -k\nu(0) + 2kz(0)$$

comme $\nu(0) = 0$ et $z(0) = 0$, on en déduit que

$$\nu'(0) = 0$$

2.

a)

$$(4) \Longleftrightarrow 2kz(t) = \nu'(t) + k\nu(t) \Longleftrightarrow z(t) = \frac{1}{2k}[\nu'(t) + kv(t)]$$

puisque k est non nul.

b) En dérivant l'expression précédente,

$$z'(t) = \frac{1}{2k}\left[\nu"(t) + k\nu'(t)\right]$$

c) L'équation (3) devient alors :

$$\frac{1}{2k}\left[\nu"(t) + k\nu'(t)\right] = -\nu'(t) - k\nu(t) + 12k(e^{-3kt} - e^{-4kt})$$

c'est-à-dire

$$\nu"(t) + 3k\nu'(t) + 2k^2\nu(t) = 24k^2(e^{-3kt} - e^{-4kt}) \qquad (E_1)$$

3. 4. 5.

• Commençons par résoudre l'équation homogène asociée à l'équation (E_1). L'équation caractéristique est

$$r^2 + 3kr + 2k^2 = 0$$

Son discriminant est $\Delta = 9k^2 - 8k^2 = k^2$. Elle admet deux racines rélles $r_1 = -k$ et $r_2 = -2k$ car k et une constante positive.
La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$t \mapsto \nu_{ssm}(t) = Ce^{-kt} + De^{-2kt}; \qquad (C, D) \in \mathbb{R}^2$$

• Cherchons maintenant une solution particulière de l'équation (E_1) sous la forme

$$t \mapsto \nu_p(t) = \alpha e^{-3kt} + \beta e^{-4kt}$$

où α et β sont des constantes réelles.
On doit donc avoir :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \nu_p"(t) + 3k\nu_p'(t) + 2k^2\nu_p(t) = 24k^2(e^{-3kt} - e^{-4kt})$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 9k^2\alpha e^{-3kt} + 16k^2\beta e^{-4kt} - 9k^2\alpha e^{-3kt} - 12k^2\beta e^{-4kt} + 2k^2\alpha e^{-3kt} + 2k^2\beta e^{-4kt}$$
$$= 24k^2(e^{-3kt} - e^{-4kt})$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 2k^2\alpha e^{-3kt} + 6k^2\beta e^{-4kt} = 24k^2e^{-3kt} - 24k^2e^{-4kt}$$

Par identification :

$$\alpha = 12 \quad \text{et} \quad \beta = -4$$

Ainsi,

$$t \mapsto \nu_p(t) = 12e^{-3kt} - 4e^{-4kt}$$

• La solution générale de l'équation (E_1) est donc

$$t \mapsto \nu(t) = \nu_{ssm}(t) + \nu_p(t)$$

soit

$$t \mapsto \nu(t) = Ce^{-kt} + De^{-2kt} + 12e^{-3kt} - 4e^{-4kt}; \qquad (C, D) \in \mathbb{R}^2$$

6. Avec $k = 0,1$ on obtient :

$$t \mapsto \nu(t) = Ce^{-0,1t} + De^{-0,2t} + 12e^{-0,3t} - 4e^{-0,4t}; \qquad (C, D) \in \mathbb{R}^2$$

Utilisons les conditions initiales

$$\nu(0) = 0 \iff C + D + 8 = 0 \iff C + D = -8$$

Dérivons la fonction ν

$$\nu'(t) = -0,1Ce^{-0,1t} - 0,2De^{-0,2t} - 3,6e^{-0,3t} + 1,6e^{-0,4t}$$

$$\nu'(0) = 0 \iff -0,1C - 0,2D - 2 = 0 \iff C + 2D = -20$$

La résolution du système d'équations en C et D conduit à

$$C = 4 \quad \text{et} \quad D = -12$$

En définitive on obtient :

$$\begin{cases} \nu(t) & = & 4e^{-0,1t} - 12e^{-0,2t} + 12e^{-0,3t} - 4e^{-0,4t} \\ \nu(0) & = & 0 \\ \nu'(0) & = & 0 \end{cases}$$

PARTIE C

La dérivée de la fonction ν est donnée pour tout $t \geq 0$ par :

$$\nu'(t) = -0,4e^{-0,1t} + 2,4e^{-0,2t} - 3,6e^{-0,3t} + 1,6e^{-0,4t}$$

$$\nu'(t) = 0,4e^{-0,1t}\left[-1 + 6e^{-0,1t} - 9e^{-0,2t} + 4e^{-0,3t}\right]$$

Posons $X = e^{-0,1t}$, le crochet devient $4X^3 - 9X^2 + 6X - 1$ qui admet une racine évidente $X = 1$, donc

$$4X^3 - 9X^2 + 6X - 1 = (X-1)(4X^2 - 5X + 1)$$

Or, $4X^2 - 5X + 1$ admet aussi 1 pour racine évidente, l'autre racine valant $\frac{1}{4}$ (voir formule donnant le produit des racines d'un polynôme du second degré).

$$4X^3 - 9X^2 + 6X - 1 = (X-1)\left[4(X-1)(X-\frac{1}{4})\right] = (X-1)^2(4X-1)$$

Finalement en remplaçant X par $e^{-0,1t}$, on obtient :

$$\nu'(t) = 0,4e^{-0,1t}(4e^{-0,1t} - 1)(e^{-0,1t} - 1)^2$$

La fonction exponentielle étant une fonction strictement postive, le signe de $\nu'(t)$ est celui de $4e^{-0,1t} - 1$

$$4e^{-0,1t} - 1 \geq 0 \iff e^{-0,1t} \geq \frac{1}{4} \iff t \leq 10\ln 4$$

Remarquons que la dérivée de la fonction ν s'annule sans changer de signe pout $t = 0$ Enfin, compte tenu des exponentielles à exposants négatifs, la fonction ν tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

On obtient alors le tableau de variation suivant :

t	0		$10\ln 4$		$+\infty$
$\nu'(t)$		$+$	0	$-$	
$\nu(t)$	0	$\nearrow$	$0,42$	$\searrow$	0

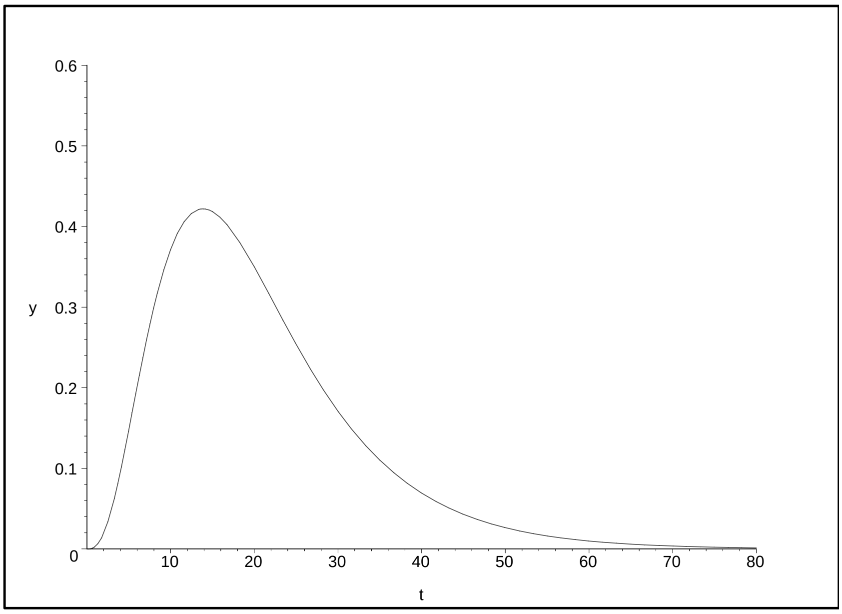

FIG. 1 – graphique de la fonction ν