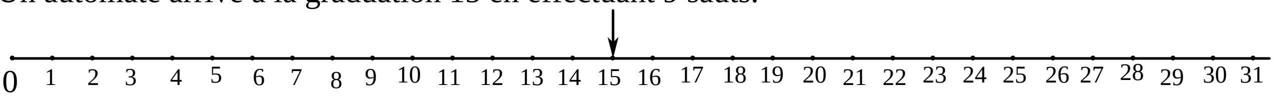
## La situation des automates

Le professeur présente la situation : sur une piste constituée d'une demi-droite régulièrement graduée avec les entiers naturels, un automate se déplace en partant du point 0 et en faisant des **sauts réguliers**. Un automate est caractérisé par son saut.

**Dans une première phase**, le professeur distribue une fiche de travail, intitulée "Comment désigner le saut d'un automate ?" (cf. fiche élève N°2), comportant les énoncés de deux activités, qui feront l'objet d'un **travail individuel** par les élèves.

*L'activité 1* comporte deux problèmes. C'est une situation d'action.

***Problème 1***
Un automate arrive à la graduation 15 en effectuant 9 sauts.




Trouver tous les entiers avant 31 par lesquels passe l'automate.

***Problème 2***
Un automate arrive à 10 en 14 sauts. Trouver tous les nombres entiers entre 150 et 180 où passe cet automate ainsi que le nombre de sauts correspondant (cf. fiche élève N°2).

*La résolution des deux problèmes qui précèdent repose sur celle du sous-problème suivant :*
est-ce que l'automate déterminé par $(n_1, s_1)$ passe par $n_2$ au bout de $s_2$ sauts ?

Voici les stratégies permettant de résoudre ce sous-problème.

• Stratégie 1 utilisant le réseau de parallèles : on partage le segment allant du point 0 au point $n_1$ en $s_1$ parties égales. On regarde si une des droites du réseau coupe la piste au point de graduation $n_2$. Si oui, on compte le nombre de segments déterminés par le réseau entre le point 0 et le point $n_2$ pour voir s'il est égal à $s_2$.

> *Par exemple, pour l'automate du problème 1 qui arrive à la graduation 15 en 9 sauts, à l'aide du réseau de parallèles, on peut constater que l'automate passe par les graduations 5, 10, 20, 25, 30 en faisant respectivement 3, 6, 12, 15, 18 sauts.*

•Stratégies (2-3-4) utilisant la linéarité de la fonction $f$ qui, à un entier $n$ par lequel l'automate passe, associe le nombre de sauts $s$ pour l'atteindre.

> •Stratégie 2 reposant sur la propriété $f(kn) = k\, f(n)$ : elle permet d'affirmer que l'automate passe par les points de la forme $kn_1$ en $ks_1$ sauts.
> *Avec le même exemple que précédemment, cette stratégie permet d'obtenir que tous les multiples de 15 sont atteints, les multiples de 9 correspondants représentant le nombre de sauts : l'automate atteint 30, 45, 60, 75, 90 en 18, 27, 36, 45, 54 sauts.*
> • Stratégie 3 consistant à déterminer le couple correspondant au premier point atteint par l'automate.
> *Avec le même exemple de l'automate qui atteint 15 en 9 sauts, l'entier 5 est le premier atteint en 3 sauts, et les entiers de la forme 5p sont donc atteints en 3p sauts.*
> • Stratégie 4 consistant à passer de $n_1$ à $n_2$ par la succession d'une division et d'une multiplication.

*Avec le même exemple, on passe de 15 à 20 en divisant 15 par 3 puis en multipliant par 4 ; on obtient le nombre de sauts correspondant en divisant 9 par 3 puis en multipliant le résultat par 4.*

• Stratégie 5 du produit en croix.

*On applique l'automatisme du « produit en croix » aux deux couples* ($n_1$, $s_1$) et ($n_2$, $s_2$). *Cette procédure permet de vérifier que l'automate passe bien par les deux points en question ; elle peut permettre de trouver des points par lequel l'automate passe, en procédant par essais successifs.*

• Stratégie 6 utilisant le quotient (ou la fraction) $n_1/s_1$ et ses multiples successifs (ou l'addition itérée).

*Avec le même exemple, on considère la fraction* $\frac{15}{9}$. *On la multiplie par des entiers successifs, et on s'intéresse à ceux pour lesquels le résultat est un nombre entier, (le fait de savoir que* $\frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ *facilite grandement les choses).*

• Stratégie 7 utilisant une approximation décimale de $n_1/s_1$ puis les multiples de cette dernière pour déterminer si l'un d'entre eux est égal à $n_2$.

*Avec le même exemple, en prenant 1,66 comme valeur approchée, les premiers multiples entiers sont 83 (pas si facile à trouver) et 166. Sauf cas particuliers, cette stratégie ne permet pas de trouver les entiers par lesquels passe l'automate.*

Dans le problème 1, l'élève peut utiliser la stratégie 1 (réseau de parallèles) comme stratégie de base. Les imprécisions qu'elle comporte devraient le pousser à utiliser le modèle linéaire.

Dans le problème 2 ainsi que pour les automates A, B et C de l'activité 2, la stratégie 1 est bloquée. Mais le milieu matériel peut l'aider à comprendre que les entiers par lesquels passe l'automate ne sont pas seulement les multiples de l'entier qui sert à le définir.

Pour l'automate C, les données sont compatibles, mais le couple de base n'est pas générateur. La stratégie 2 échoue, car 21 n'est pas un multiple de 6. Cela peut amener certains élèves à modifier 21, et le remplaçant par exemple par 24.

Pour l'automate D, les données ne sont pas compatibles, et plusieurs modifications d'un seul des nombres donnés sont possibles.

*L'activité 2* demande à l'élève, toujours en travail individuel, de vérifier des tableaux de relevés faits par des contrôleurs d'automates peu compétents (relevés incomplets ou comportant des erreurs). Voir l'annexe 3. Il répond sur la feuille de l'annexe 4, en complétant les relevés et en corrigeant certains nombres, après avoir bien réfléchi.