

Fractions et décimaux

Scénario 2 : le pliage des bandes de papier

Cette fiche n'est pas un programme pédagogique. Elle a pour but de faire apercevoir la portée de l'approche « pliage de bandes » et les conséquences que l'on peut en tirer en direction de la construction des fractions et des décimaux, de la comparaison, du calcul additif ou multiplicatif.

Plusieurs de ces aspects ne sont pas développés dans les fiches-élèves qui suivent (utilisation d'un rectangle pour la comparaison ou le calcul multiplicatif) ; mais l'on souhaite montrer ainsi la cohérence de cette approche, ainsi que les difficultés qu'elle soulève néanmoins, comme toute autre.

Le principe de cette présentation des fractions consiste à construire plusieurs échelles et à les comparer. Une échelle a pour but de repérer avec précision croissante des longueurs à mesurer.

Cette phase de construction suppose bien sûr que l'on mette de côté les unités et les instruments de mesure habituels. On se donne une **unité**, par exemple la *largeur* d'une feuille de papier A4 (il est facile d'obtenir un grand nombre d'exemplaires, de couleur et largeur diverses, en pliant et découpant plusieurs feuilles).

On peut à l'aide de ces bandes-unité mesurer d'autres objets : la *longueur* d'une feuille A4, la largeur d'une table, la hauteur d'une porte etc. Plutôt que de *reporter* cette unité, on peut aisément construire des bandes de longueur 2, ou 3, ou 5 unités, et éviter ainsi des reports.

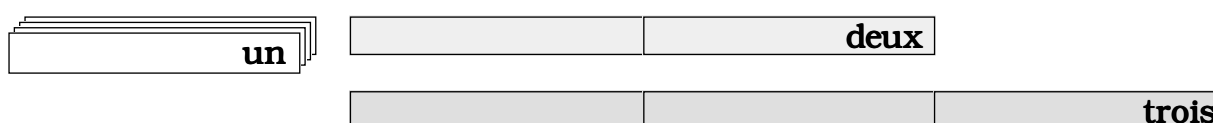


fig. 1

1. Graduations

Ceci permet de graduer un axe :

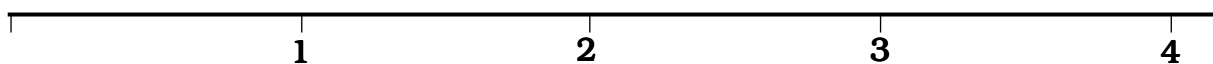


fig. 2

Ainsi trouvera-t-on que la hauteur d'une porte (standard) est comprise entre 9 et 10 unités.

En revanche, la mesure de la longueur d'une feuille manque de précision : entre 1 et 2 unités.
 Pour améliorer la précision, on partage l'unité. On utilise pour cela un réseau de traits parallèles.
 Ce réseau permet de subdiviser les bandes. Exemple :

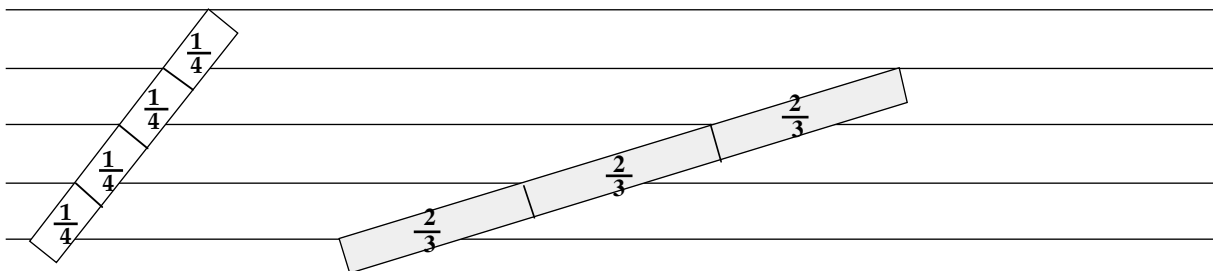


fig. 3

On a plié la première bande en quatre, on obtient des **quarts** ; la notation chiffrée conventionnelle est une fraction ; le nombre qui occupe la position supérieure (NUMERATEUR) représente l'objet partagé, l'unité. Le nombre qui occupe la position inférieure (DENOMINATEUR) indique le nombre de parties.

On a plié la seconde bande en trois, on obtient des **tiers**. (numérateur : 2, dénominateur : 3).

Par définition , on traduit ces subdivisions par :

$$\text{Definition : } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

Un premier résultat important est exprimé par l'exemple suivant :

« Il revient au même de prendre le tiers de 2 et de prendre deux fois le tiers de l'unité ».

$\frac{2}{3}$		deux	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

fig.4 (grossie)

2. Premières égalités

En reportant le long de l'axe précédent (fig. 2), on obtient deux nouvelles graduations :

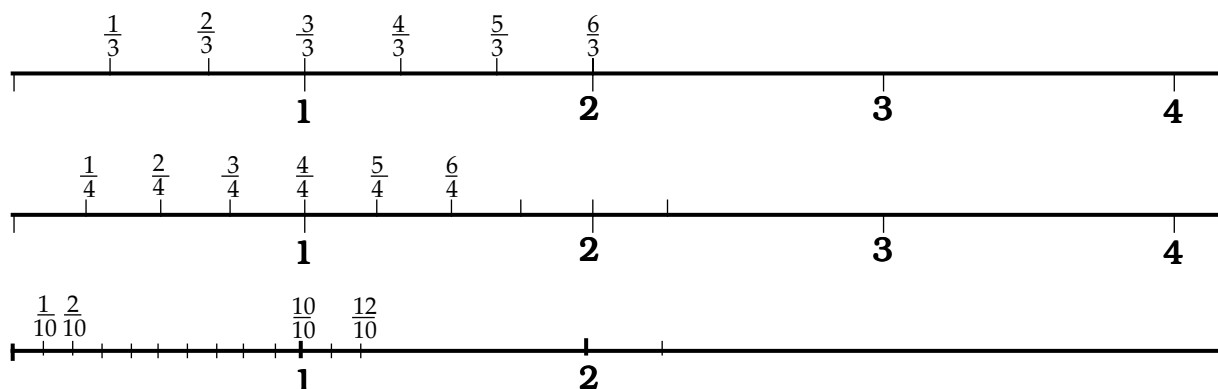


fig. 5

Remarque : une première difficulté conceptuelle se trouve ici. On aura remarqué que la graduation ne comporte pas 0 en son point de départ. Les nombres (entiers ou fractionnaires) ont un double usage : ils représentent une longueur de bande, et en même temps ils repèrent un point de la graduation.

En calant tous les points de départ, on constate ainsi des **coïncidences** qui vont s'écrire :

$$\frac{3}{3} = \frac{4}{4} = 1, \quad \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2, \quad \frac{2}{4} = \frac{5}{10}, \quad \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{15}{10} \text{ etc.}$$

L'écriture ci-dessous (à gauche) est matérialisée par les bandes (à droite).



fig. 6

3. Comparaison de fractions

La confrontation de ces graduations permet aussi d'écrire des *inégalités* :

$$\frac{4}{3} < \frac{3}{2} < \frac{5}{3} \quad \frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{6}{4}$$

Et aussi d'obtenir des encadrements plus précis pour une longueur à mesurer. Ainsi, L représentant la *longueur* d'une feuille A4 :

$$\frac{4}{3} < L < \frac{5}{3}, \quad \frac{5}{4} < L < \frac{6}{4}, \quad \frac{14}{10} < L < \frac{15}{10}$$

Mais ceci ne permet pas encore de comparer deux fractions quelconques, comme 4/7 et 5/9.

Deux règles empiriques simples résultent de ces comparaisons :

> *Quand deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.*

$$\text{Exemple : } \frac{5}{3} > \frac{4}{3}$$

> *On obtient une fraction égale en multipliant numérateur et dénominateur par le même nombre ($\neq 0$).*

$$\text{Exemple : } \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{10}{15} = \dots$$

On dispose alors d'un moyen pour comparer deux fractions.

Pour comparer deux fractions, on dresse d'abord une liste de fractions égales :

$$\frac{4}{7} = \frac{8}{14} = \frac{12}{21} = \frac{16}{28} = \frac{32}{56} = \dots = \frac{36}{63}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{10}{18} = \frac{15}{27} = \frac{20}{36} = \frac{25}{45} = \dots = \frac{35}{63}$$

Ce qui permet de conclure : $\frac{35}{63} < \frac{36}{63}$ donc $\frac{5}{9} < \frac{4}{7}$

Remarque : Un autre moyen de comparaison, au moins pour les fractions inférieures à l'unité, procède d'une construction géométrique sur un quadrillage. Commençons par représenter des fractions :

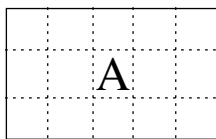


fig.7

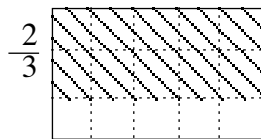


fig. 8

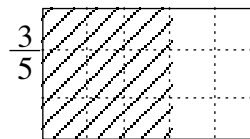


fig. 9

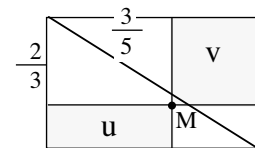


fig. 10

La surface-unité est A. Sur les figures 8 et 9, les surfaces hachurées représentent respectivement $2/3$ et $3/5$. Il reste à comparer ces deux rectangles. On peut, soit dénombrer les carreaux (respectivement 10 et 9), soit utiliser la propriété de la diagonale (fig. 10, cf. document Aire & Périmètre). Le point d'intersection M est *au-dessous* de la diagonale, l'aire grisée *u* est inférieure à l'aire *v*, et l'on conclue : $3/5 < 2/3$.

Remarque 1 : il n'est nullement nécessaire d'utiliser un quadrillage à mailles carrées.

Remarque 2 : cette représentation géométrique sera reprise pour aborder le *produit* de fractions.

Remarque 3 : *pratiquement*, la méthode de la diagonale ne permet pas une grande précision.

4. Pluralité d'écritures, notation décimale

La meilleure possibilité de maîtrise des fractions et des décimaux, décisive pour les comparaisons et les calculs, consiste en la *pluralité des écritures*. On est habitué à manipuler des décompositions additives sur les entiers ; c'est l'un des outils fondamentaux du calcul réfléchi. Il est fondamental de s'attarder sur la multiplicité des écritures d'une fraction (puis d'un décimal), avant d'aborder les calculs.

$$\text{Ainsi } \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} \dots$$

En particulier, le détachement de la partie entière facilite comparaisons et calculs.

Dans le cas d'un partage en dix parties, on introduit une nouvelle notation (*nombres décimaux*).

Par définition $2,3 = 2 + \frac{3}{10} = \frac{23}{10}$

Le nombre de chiffres après la virgule indique le partage de l'unité.

Exemples : $0,12 = \frac{12}{100} = \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$ $2,03 = 2 + \frac{3}{100}$

2,03 peut se lire « 2 et 3 centièmes »

5. Calcul additif

L'addition est représentée par une juxtaposition de bandes.



fig. 11

Dans le cas de fractions de même dénominateur, il suffit de travailler sur une seule graduation.

Exemple : $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2$ ou encore $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 1 - \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 2$

Comment procéder dans le cas général ?

Exemple : $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = ?$

La juxtaposition des deux bandes permet déjà de recueillir un encadrement.

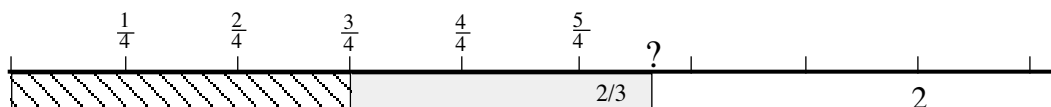


fig. 12

$$\frac{5}{4} < \frac{3}{4} + \frac{2}{3} < \frac{6}{4}$$

Pour obtenir un résultat exact, il convient de se ramener à une graduation commune, c'est-à-dire au même dénominateur.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} \quad \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} \quad \text{donc} \quad \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12}$$

En ce qui concerne les décimaux, on peut soit se ramener à des fractions soit utiliser le principe du *changement d'unité* (qui revient au même).

$$2,12 + 2,1 = ?$$

$$2,12 = 2 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} \quad 2,1 = 2 + \frac{1}{10} \quad \text{donc} \quad 2,12 + 2,1 = 4 + \frac{2}{100} + \frac{2}{100} = 4,22$$

<u>U</u>	V	W
+ 2,1	21	210
2,12	21,2	+ 212
<hr/> 4,22		<hr/> 422

fig. 13

6. Calcul multiplicatif

Si le calcul additif n'offre guère d'alternative, puisque l'on reste dans le champ de mesures de longueurs, le calcul multiplicatif offre deux interprétations.

La première consiste à revenir à la définition du produit comme mesure d'une aire. L'aire d'un rectangle est mesurée par le produit des longueurs des côtés.

La seconde interprétation s'exprime en terme de transformation.

Ces deux interprétations sont liées par la double lecture que l'on peut faire d'une fraction.

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2 \text{ (un tiers de 2, ou encore 2 divisé par 3)} = 2 \times \frac{1}{3} \text{ (deux fois un tiers)}$$

Considérons par exemple le produit $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

On peut l'interpréter comme la mesure d'un rectangle dont les côtés mesurent $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$

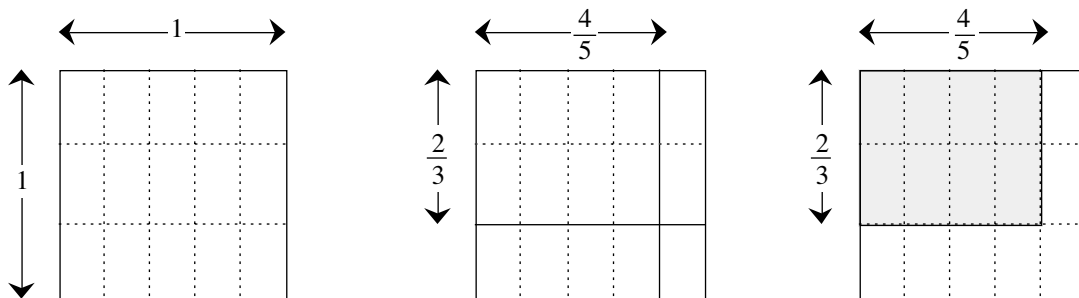


fig.14

Il reste à calculer le résultat : on obtient 2×4 carreaux sur 3×5 , soit $\frac{8}{15}$.

La seconde interprétation consiste à considérer que l'on prend d'abord les $\frac{2}{3}$, puis les $\frac{4}{5}$ du résultat (l'ordre inverse conduit bien sûr au même résultat).

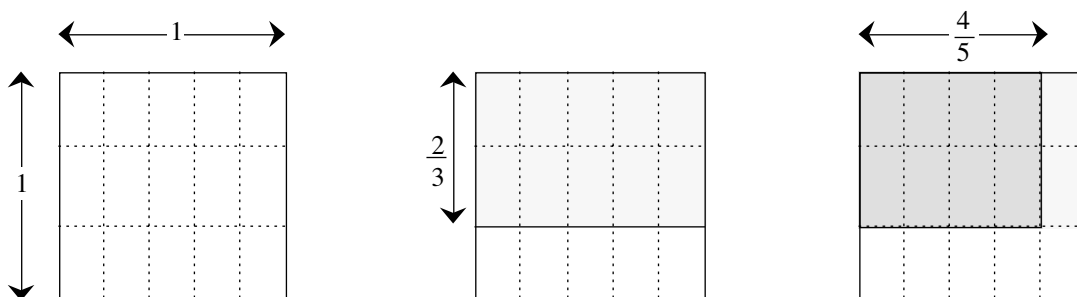
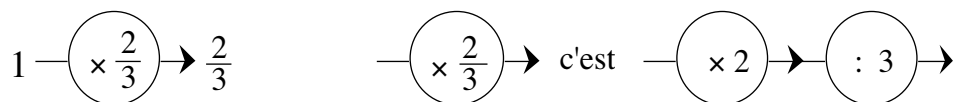
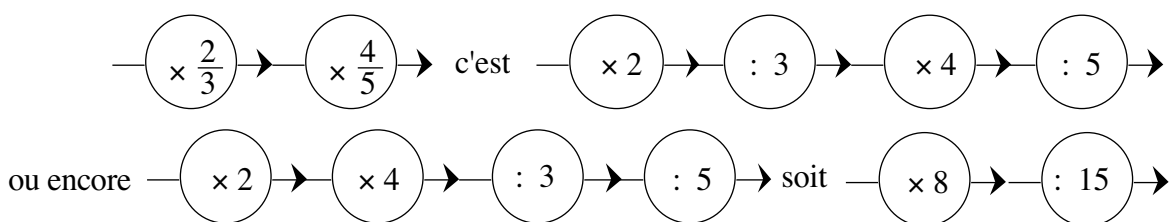


fig. 15

Remarque : Cette seconde interprétation contient un moyen de calcul pratique très efficace, grâce à un abus de langage : c'est la méthode des opérateurs. L'abus de langage consiste à identifier $\frac{2}{3}$ et $\times \frac{2}{3}$.



Grâce à quoi on peut décomposer une fraction en deux opérateurs. Ceux-ci pouvant commuter et s'associer, on obtient une procédure de calcul.



Dans tous les cas, le résultat s'énonce en une règle simple :

« *numérateur = produit des numérateurs ; dénominateur = produit des dénominateurs* ».

La seconde démarche offre le grand mérite de permettre de traiter aisément la *division* d'un entier ou d'une fraction par une fraction, par le moyen de la fraction *inverse*.



La commodité du schéma utilisé fig.14 et 15 provient du fait qu'il s'agit de fractions inférieures à l'unité. Il serait applicable, mais beaucoup moins facile à lire, avec des fractions pouvant être supérieures à l'unité.

En ce qui concerne le produit des décimaux, il est préférable de passer d'abord par leur définition fractionnaire, afin d'éviter que la règle relative aux "chiffres après la virgule" ne soit vouée à une forte érosion, faute de représentation bien établie.

Exemple : $2,12 \times 2,1 = \frac{212}{100} \times \frac{21}{10} = \frac{4452}{1000} = 4,452$

La pratique du calcul approché doit également permettre de déterminer l'ordre de grandeur du résultat, donc la "position de la virgule".

Remarque sur les calculettes

Au-delà de cette phase de reprise de signification des fractions et des décimaux, l'usage de machines permet d'effectuer des calculs et plus généralement de fournir des résultats en plus grande quantité que les manipulations manuelles. Mais elles ne sauraient s'y substituer.

Deux sortes de machines peuvent être utilisés, à des fins différentes.

Les calculatrices de type "CASIO Collège" permettent de calculer en mode "fraction" ou en mode "décimal". Les calculettes les plus ordinaires (quatre-opérations) ne fonctionnent qu'en mode "décimal". Elles *tronquent* toute suite décimale (généralement à huit chiffres) alors que les calculatrices *arrondissent*. Les unes comme les autres présentent le grave inconvénient de substituer par exemple à la fraction $1/3$ le décimal $0,3333333$ *qui ne lui est pas égal*. Cependant, judicieusement utilisées, les calculettes permettent d'explorer les suites décimales au-delà de l'affichage, par exemple pour en déterminer la période.

