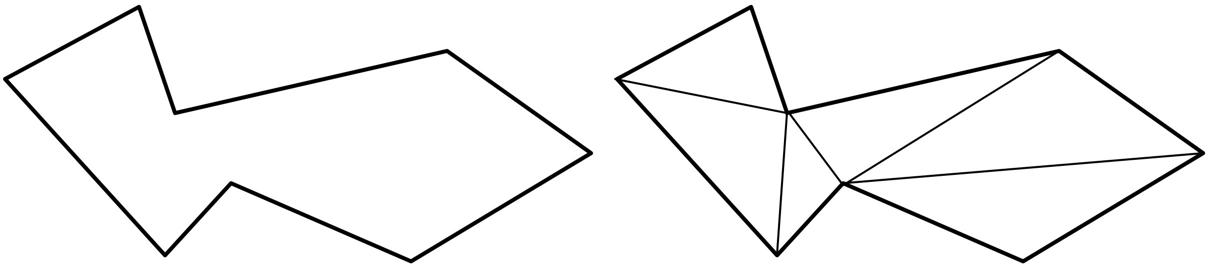
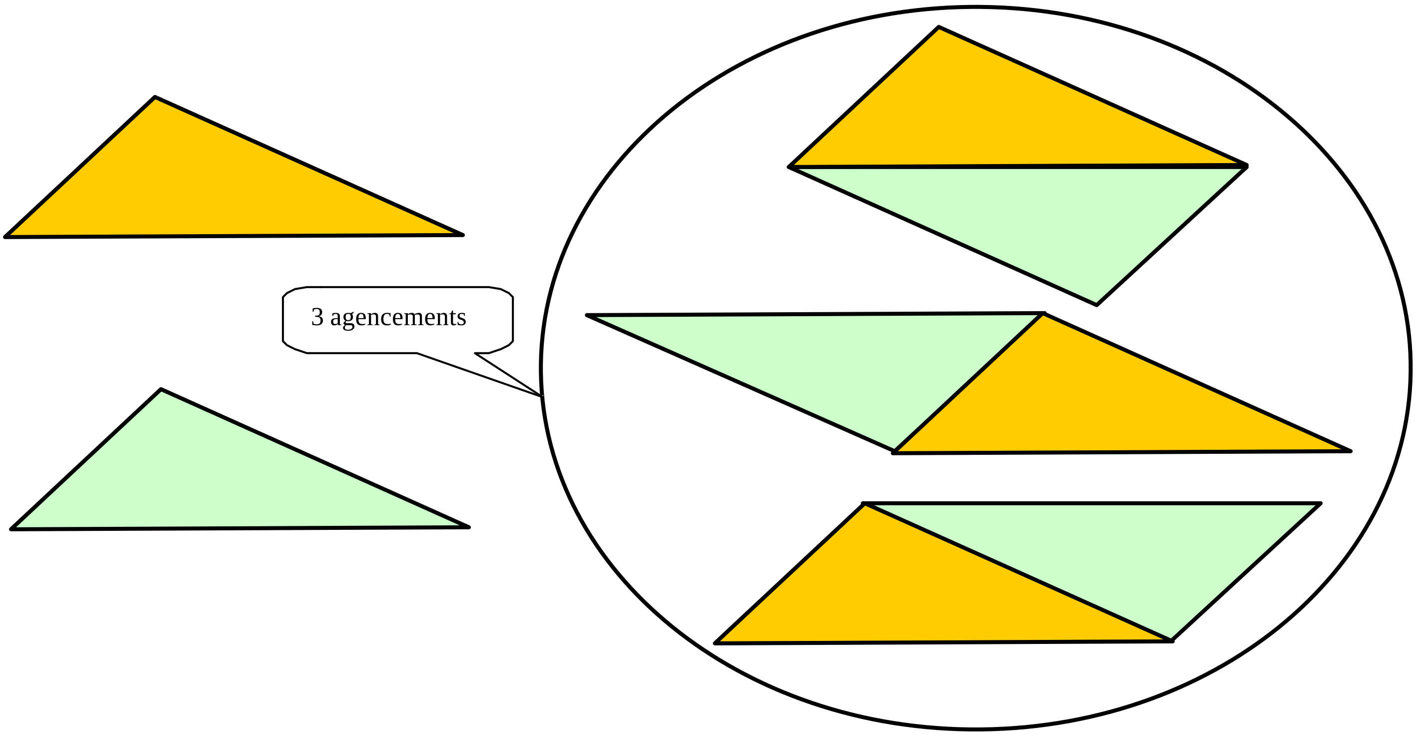
Transformations : Du polygone au carré

I) Décomposition d'un polygone en triangles

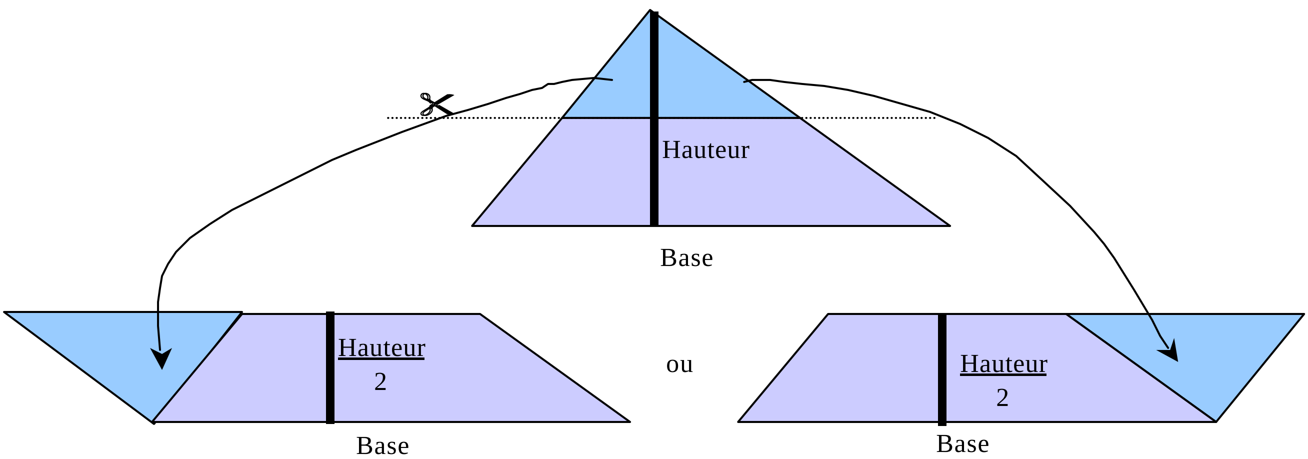


II) Du triangle au parallélogramme

- Construction d'un parallélogramme à partir de 2 triangles identiques. (Fiche 10a)

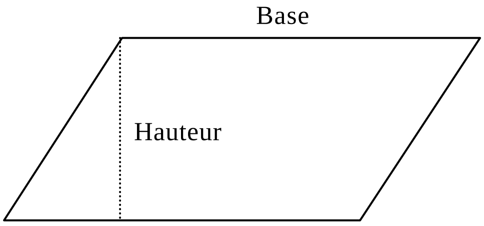


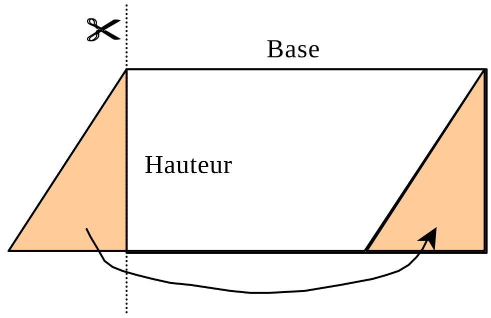
- Construction d'un parallélogramme à partir d'un triangle. (Fiche 10b + annexe)



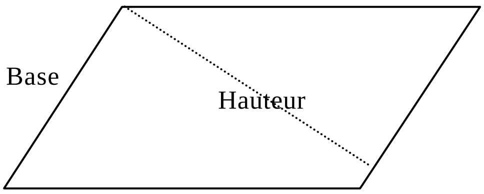
Aire du triangle est égale à celle du parallélogramme « correspondant »

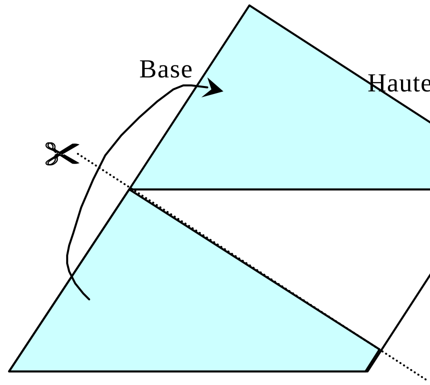
III) Construction d'un rectangle à partir d’un parallélogramme. (Fiche 10c)





ou

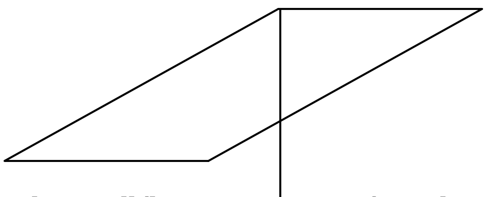




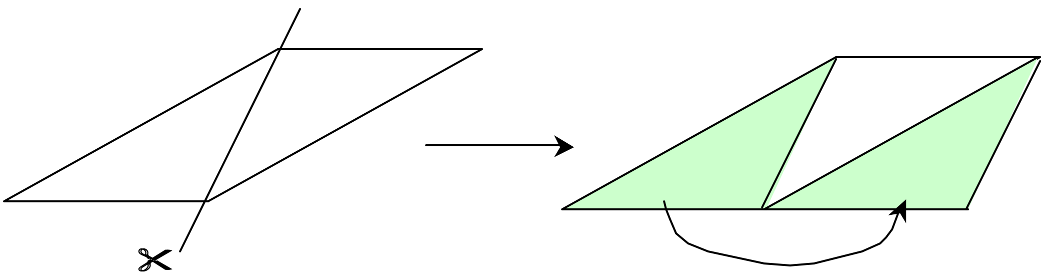
Aire du parallélogramme = Base × Hauteur correspondante

Remarque : cas où le pied d'une hauteur n'appartient pas à un côté.

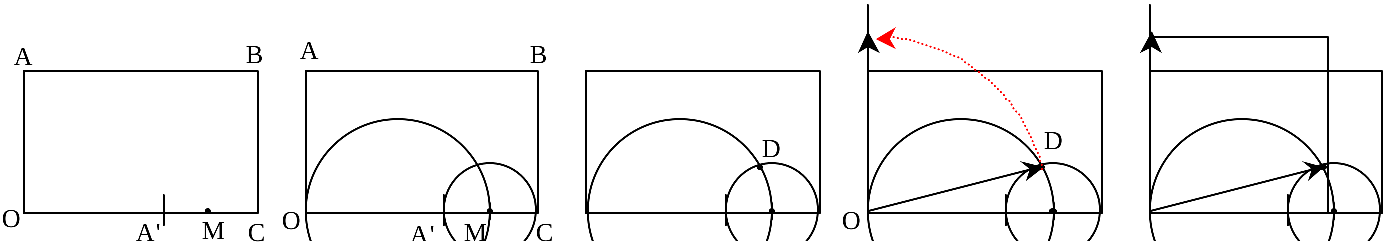
Exemple :



Il suffit de « redresser » le parallélogramme en opérant la transformation suivante (que l’on répètera éventuellement jusqu’à ce que la hauteur soit intérieure).



IV) Construction du carré ayant même aire qu'un rectangle donné. (Fiche 10d)



Reporter OA en OA'. Placer M au milieu de A'C

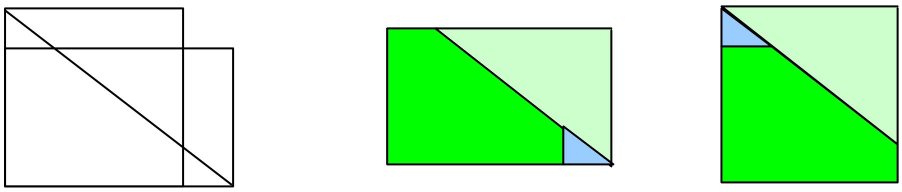
Tracer les cercles de diamètre A'C et OM

D point d'intersection des deux cercles

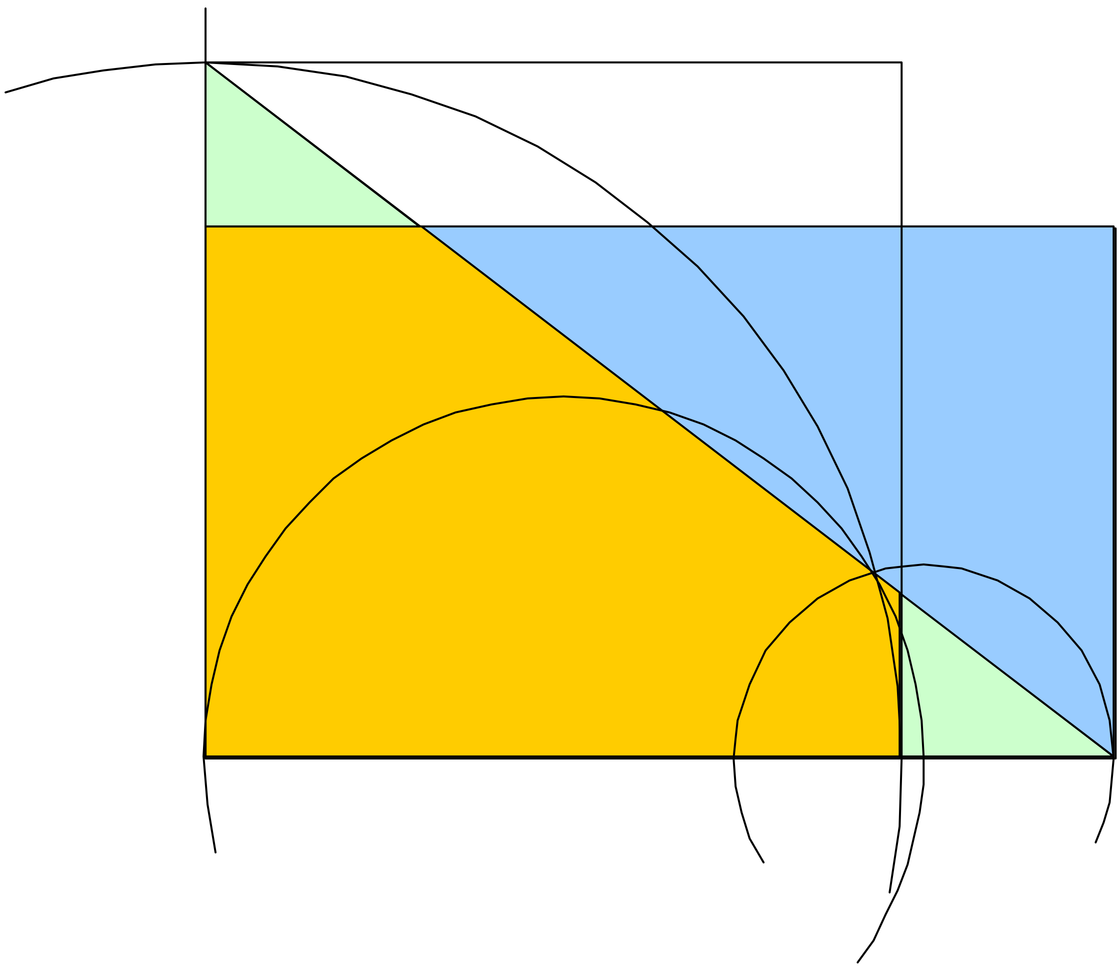
Reporter OD qui représente le côté du carré ayant même aire que le rectangle OABC

On peut démontrer que $OD = \sqrt{OA \times OC}$

Découpage

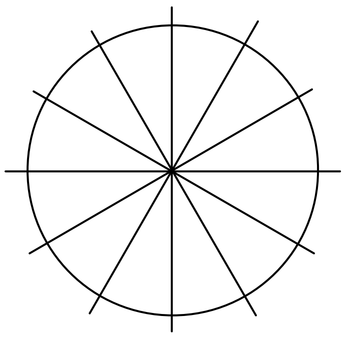


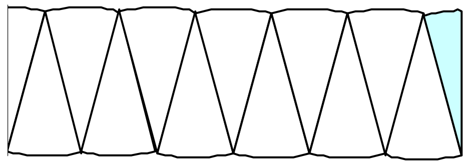
Corrigé de la fiche 10d

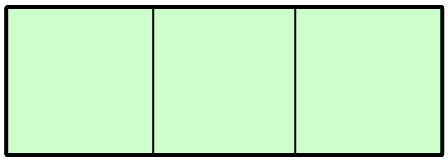


V) Quadrature du cercle

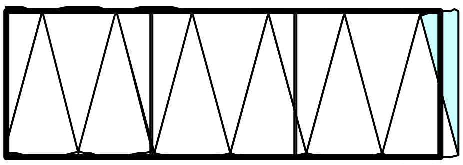
Nous savons qu'une telle transformation est impossible. La transformation proposée permet une approche simple et rapidement assez précise de π.







La superposition fait apparaître
que l'aire du disque
est un peu supérieure
à celle du rectangle constitué
de 3 carrés de côté le rayon du disque

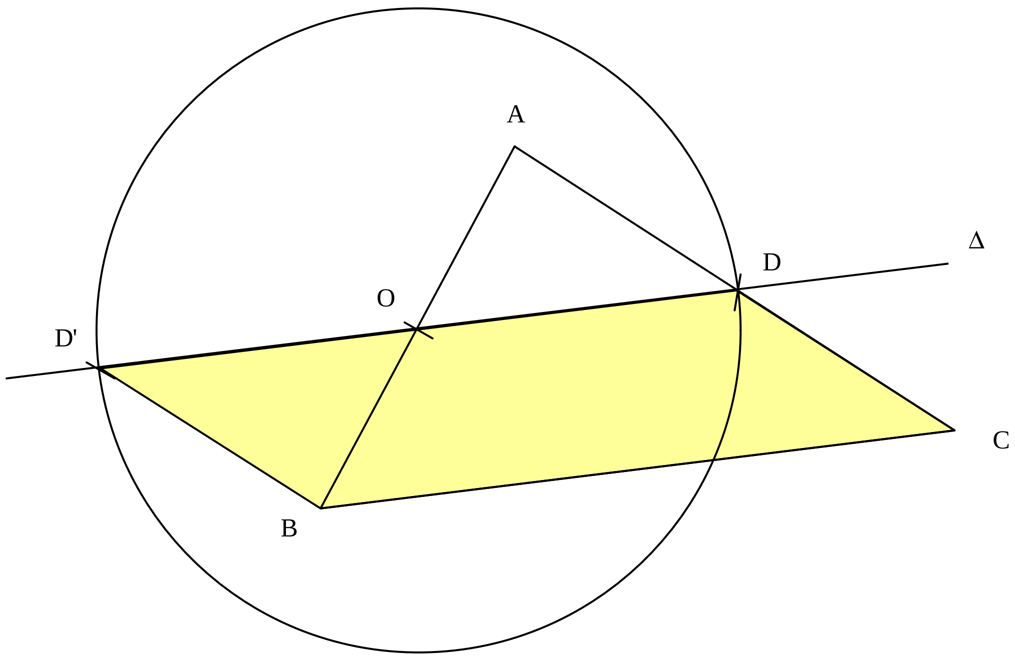


D'où : Aire du disque un peu supérieure à $3 r^2$.

La formule exacte "Aire du disque = πR^2" ne peut , au niveau collège, qu'être fournie par l'enseignant.

Annexe :
En complément de la fiche 10b, il est possible (selon le niveau des élèves) de démontrer que le découpage-recomposition présenté produit bien un parallélogramme et que ce dernier a la même aire que le triangle initial. Cette démonstration utilisant la symétrie centrale qui occupe une place essentielle dans les programmes actuels, il nous paraît intéressant de la présenter.

Construction :
Soit ABC un triangle quelconque.
Placer le point O milieu de [AB],
Construire la droite Δ parallèle à (BC) et passant par O
Placer le point D intersection de Δ et de [AC]
Placer le point D' symétrique de D par rapport à O



Analyse du quadrilatère D D' B C
1) Par construction (D D') est parallèle à (BC)
2) [B D'] est le symétrique de [AD] par la symétrie centrale de centre le point 0.
Donc (BD') est parallèle à (AD) et donc à (DC)

Le quadrilatère D D' B C est un parallélogramme.

Calcul de son aire :
Aire du parallélogramme DD'BC = aire de D'BO + aire de OBCD
Aire du triangle ABC = aire de AOD + aire de OBCD
Or aire de D'BO = aire de OAD car D'BO est le symétrique de AOD par la symétrie centrale de centre le point 0

Donc : aire du parallélogramme D'BCD = aire du triangle ABC