ministère éducation nationale

ÉduSCOL [dgesco]

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Mathématiques
Collège

Projet de document d'accompagnement

- Probabilités-

17 mars 2008

Probabilités

« Pour comprendre l'actualité, une formation à la statistique est aujourd'hui indispensable ; c'est une formation qui développe des capacités d'analyse et de synthèse et exerce le regard critique. Le langage élémentaire de la statistique (avec ses mots tels que moyenne, dispersion, estimation, fourchette de sondage, différence significative, corrections saisonnières, espérance de vie, risque, etc.) est, dans tous les pays, nécessaire à la participation aux débats publics : il convient donc d'apprendre ce langage, ses règles, sa syntaxe, sa sémantique ; l'enseignement de la statistique étant, par nature, associé à celui des probabilités, il s'agit en fait d'une " formation à l'aléatoire ". »[1]. Le rapport de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, d'où la citation précédente est extraite, évoque dans les termes suivants l'enseignement au collège et au lycée : « L'objectif d'une initiation aux probabilités et à la statistique aux niveaux collège et lycée est d'enrichir le langage, de repérer des questions de nature statistique, de définir des concepts qui fonderont un mode de pensée pertinent, rassurant, remarquablement efficace. Les modes usuels de représentation graphique (histogrammes, diagrammes en bâtons notamment), c'est-à-dire les éléments de base du langage graphique de la statistique sont aujourd'hui enseignés en collège et une introduction à l'aléatoire, appuyée sur le calcul de probabilités et la simulation, est proposée dans les nouveaux programmes de lycée ». La mise en place du socle commun modifie cette répartition, en demandant que les élèves, à la fin de la scolarité obligatoire, connaissent « les notions de chance ou de probabilité ». Alors qu'un enseignement des probabilités a depuis longtemps trouvé sa légitimité au niveau du lycée, un tel enseignement est une nouveauté en France au niveau du collège, contrairement à la situation existant dans de nombreux pays voisins (Allemagne, Espagne, …). Le programme de troisième comporte la rubrique reproduite ci-dessous :

1.4. Notion de probabilité [Thèmes de convergence]	- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité. - Calculer des probabilités dans des contextes familiers.	La notion de probabilité est abordée à partir de situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes). Certaines de ces situations permettent de rencontrer des cas pour lesquels les probabilités ne sont pas définies à partir de considérations intuitives de symétrie ou de comparaison mais sont approximativement évaluées par les fréquences observées expérimentalement (approche fréquentiste des probabilités). La notion de probabilité est utilisée pour traiter des situations de la vie courante pouvant être modélisées simplement à partir des situations précédentes. Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou *à deux épreuves*.	Dans le cadre du socle, aucune compétence n'est exigible dans le cas des expériences à deux épreuves.

Ce document **explicite les choix faits dans le programme de troisième**, en précisant dans les paragraphes 1 et 2 les contextes qui seront privilégiés dans les premières situations d'enseignement, dans les paragraphes 3 et 4 les moyens de représentation et de traitement.

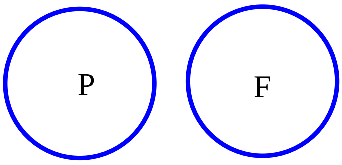
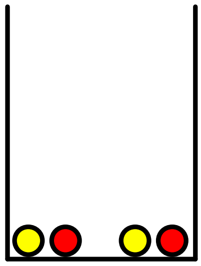
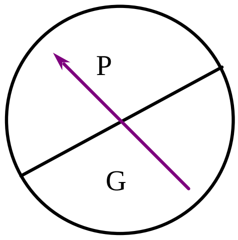
Le paragraphe 5 **traite des expériences aléatoires à deux épreuves**, **sur lesquelles aucune compétence n'est exigible dans le cadre du socle commun**.

L'annexe 1 donne les diverses interprétations de la notion de chance (ou probabilité) et l'annexe 2 donne quelques éléments sur l'émergence de la notion de probabilité. Dans ces annexes, certains développements ou calculs, justifiant les résultats importants, font référence à la théorie enseignée dans l'enseignement supérieur.

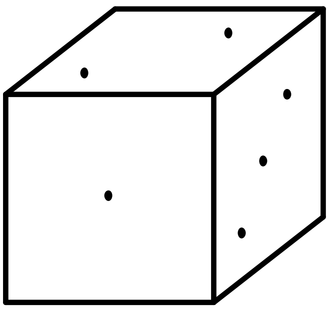
[1] Voir en bibliographie l'ouvrage [1], pages 52 et 53.

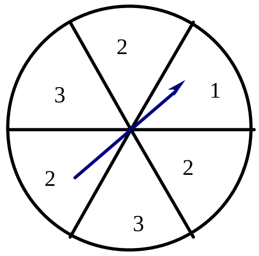
1. Probabilités définies à partir de considérations de symétrie ou de comparaison

Dans chacune des situations ci-dessous, deux issues (ou résultats) sont possibles, et on a 1 chance sur 2 de tirer “Pile”, de tirer une boule rouge, ou de tomber sur la région P, ce que l’on traduit en disant que la probabilité de chacune d’elles est égale à 1/2[2].

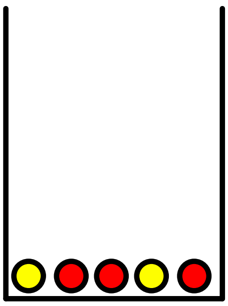
Lancer d’une pièce “équilibrée”	Tirage d’une boule dans une urne	Tirage avec une roue de loterie
		

D’autres situations classiques permettent d’obtenir d’autres valeurs pour les probabilités des différentes issues (ou événements) :



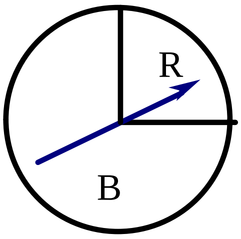


Les dispositifs précédents peuvent être adaptés pour mettre en évidence des événements n’ayant pas la même probabilité.



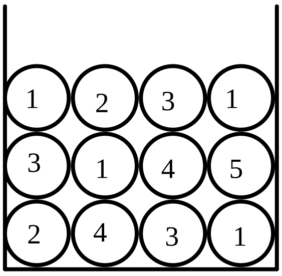
Dans le tirage au hasard d’une boule dans l’urne,
- on a 3 chances sur 5 d’obtenir une boule rouge.
- la probabilité d’obtenir une boule jaune est 2/5. Il y a 40% de chance d’obtenir une boule jaune.

[2] Les justifications solliciteront l’une quelconque des interprétations de la probabilité (cf. annexe 1) : interprétation fréquentiste dans sa variante « propension » ; mais certains élèves feront certainement appel à l’interprétation épistémique, dans sa variante personnelle ou interpersonnelle ; la variante logique conduisant à faire appel au principe d’indifférence (ou de raison insuffisante).



En lançant cette roue de loterie « équilibrée », la probabilité de tomber sur la région R est 1/4, …

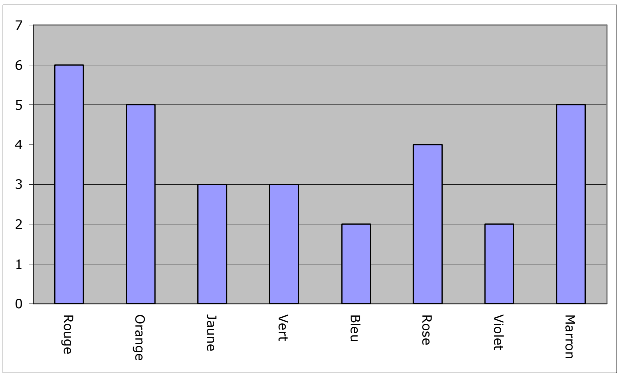
Par tirage dans une urne ayant la composition suivante :



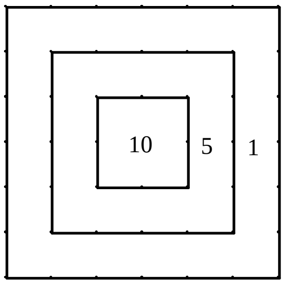
où chacune des boules a la même probabilité d'être tirée, les « résultats » 1, 2, 3, 4 et 5 ont respectivement comme probabilités : 1/3, 1/6, 1/4, 1/6 et 1/12. L'exploitation de tels exemples peut déboucher sur la mise en place de la formule de Laplace : la probabilité d'un résultat est égale au quotient du nombre d'issues favorables (issues dans lesquelles on obtient le résultat) par le nombre total d'issues possibles lors du tirage. Par exemple, quatre issues sont favorables au résultat « 1 », sur un total de 12 issues possibles.

On peut en déduire que la probabilité de l'événement « ne pas tirer une boule portant le numéro 1 » est égale à 8/12 ou 2/3, et que celle d'obtenir un résultat pair est égale à 1/3, premier contact avec la recherche de la probabilité d'un événement contraire ou de la probabilité d'obtenir l'un ou l'autre de deux événements.

L'exercice suivant, tiré de l'évaluation PISA, fait appel à ce mode de calcul d'une probabilité :

> La mère de Kevin lui permet de prendre un bonbon dans un sachet opaque. Kevin ne voit donc pas les bonbons. Le nombre de bonbons de chaque couleur contenus dans le sachet est illustré par le graphique suivant :
>
> 
>
>
> Quelle est la probabilité que Kevin prenne un bonbon rouge ?
> A 10%
> B 20%
> C 25%
> D 50%

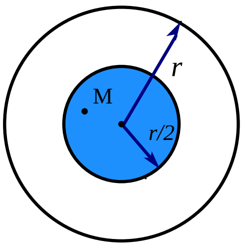
Des exemples de calculs de probabilités « géométriques » tels que ceux qui suivent permettent également de calculer les probabilités des événements du type « atteindre une région précise de la cible » ou « obtenir un écho radar dans une zone précise de l'écran de contrôle » :



On imagine qu'un tireur tire parfaitement au hasard sur la cible ci-contre, sans jamais la rater (!). Tous les carrés sont concentriques et leurs côtés ont pour mesure a, $2a$ et $3a$.
Quelles sont les probabilités pour qu'il gagne 10 points, 5 points, 1 point ?
La probabilité relative à une région est proportionnelle à son aire : c'est le rapport de son aire à celle de la cible.

Réponse : 1/9, 1/3 ou 3/9, 5/9.

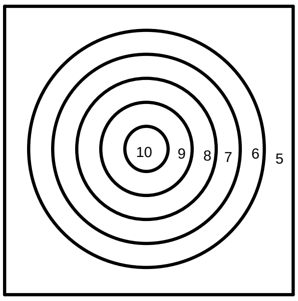
La recherche de la probabilité de tirer dans une région portant un numéro supérieur ou égal à 5 permet de mettre en place que l'on peut additionner les probabilités d'événements incompatibles ou qu'il est parfois plus facile de calculer d'abord la probabilité de l'événement contraire.



Sur l'écran circulaire de rayon r d'un radar, on suppose que le point M représentant un avion se projette au hasard sur l'écran.
Quelle est la probabilité pour qu'il apparaisse dans la zone colorée, disque de rayon $r/2$?

Réponse : 1/4.

On peut étudier des exemples plus compliqués du même type que le premier :



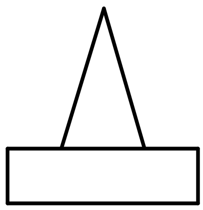
Un tireur tire parfaitement au hasard sur cette nouvelle cible, sans jamais la rater. Tous les cercles sont concentriques, leurs rayons sont r, $2r$, $3r$, $4r$, $5r$ et le carré a un côté de longueur $12r$.
Quelles sont les probabilités pour qu'un point d'impact appartienne à chacune des régions 10, 9, …, 5 ?

Réponse : 0,022 ; 0,065 ; 0,109 ; 0,153 ; 0,196 ; 0,455.
(Valeurs approchées).

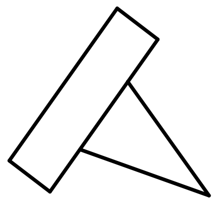
2. Approche fréquentiste de la probabilité

Les situations précédentes ne sont guère pertinentes pour aborder l’interprétation fréquentiste de la probabilité comme « fréquence limite ». Or cette interprétation est très importante pour les applications des probabilités dans des situations de la vie courante. Elle permet en outre de donner une justification des calculs de probabilités dans des expériences à deux épreuves, traités au paragraphe 5.

L’approche fréquentiste exige que des fréquences soient observées expérimentalement ; le lancer d’une punaise (pouvant tomber suivant la position « 1 » ou la position « 0 » ci-dessous) a longtemps servi d’exemple dans les pays anglo-saxons[3] :



1

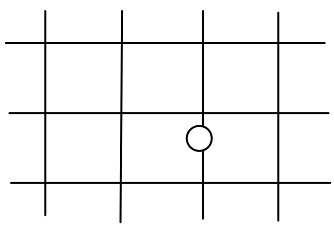


0

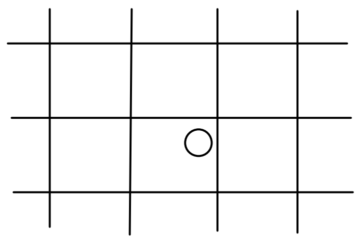
Pour un petit nombre de lancers successifs, la suite des résultats semble ne suivre aucune loi. Mais, en lançant un grand nombre de fois la punaise, la suite de résultats « 1 » et « 0 » laisse apparaître une régularité dans la fréquence de chacune des deux issues. Ainsi, les fréquences observées du résultat « 1 » en fonction du nombre de lancers connaissent au début une forte variabilité qui tend à se réduire avec le nombre de lancers. L’intérêt du lancer de punaise réside dans le fait que seule l’expérimentation permet de proposer une probabilité au résultat « 1 ».

Il est important, dans un premier temps, que les élèves puissent constater matériellement ce phénomène de stabilisation des fréquences. Toutefois, pour éviter les lancers de punaises (!), on peut proposer la situation du jeu du « Franc Carreau »[4], en cherchant à déterminer approximativement la probabilité de gagner.

Le jeu de « Franc Carreau » consiste à prendre une pièce de monnaie (de 1 cm de rayon, par exemple), et à la lancer sur un carrelage dont les carreaux sont des carrés (de 10 cm de côté, par exemple). On fait « Franc Carreau » quand la pièce tombe sur une seule case, dont elle peut toucher les bords, mais sans empiéter sur une autre case. Dans ce cas, on gagne un euro ; sinon, on perd un euro.



Le joueur perd 1€



« Franc Carreau » : le joueur gagne 1 €

Le joueur a-t-il davantage de chance de gagner que de perdre ?

L’idée d’entreprendre une série de lancers et de s’intéresser à la fréquence de succès est alors assez naturelle, et s’appuie sur la connaissance naïve de la loi des grands nombres

[3] Voir [8] en bibliographie.
[4] Par exemple, on peut remplacer le carrelage du sol par un quadrillage sur papier.

évoquée par Bernoulli : « plus on fait d'observations, moins on risque de s'écarter de notre but »[5]. Pour augmenter le nombre de lancers, on peut mettre en commun les résultats obtenus par des groupes d'élèves, puis par l'ensemble de la classe[6].

Cette situation présente l'avantage que l'on peut déterminer cette probabilité à l'aide de considérations géométriques, sans que cette valeur soit connue au départ (comme c'est le cas avec le jeu de pile ou face avec une pièce « équilibrée », ou le jeu du lancer d'un dé cubique « non truqué »). On peut conduire cette justification avec les élèves en leur posant la question : « Dans quelle partie du carré doit se trouver le centre de la pièce pour que le joueur puisse faire “ Franc Carreau ” ? » La réponse (carré de côté 8 cm, dans l'exemple) permet de calculer la probabilité à l'aide du rapport des aires des deux carrés.

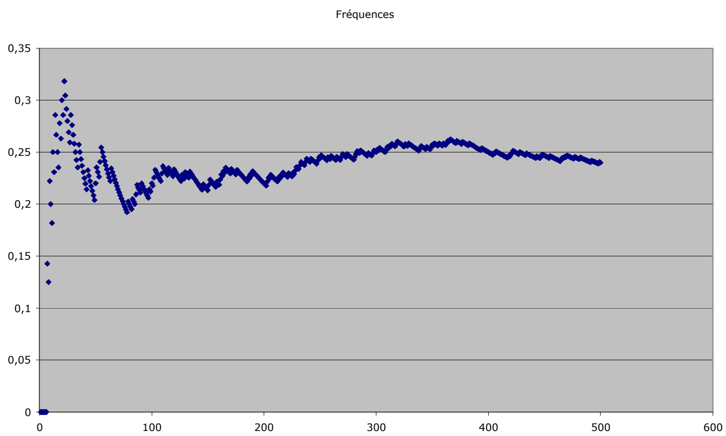
Dans un second temps, pour disposer facilement d'un grand nombre d'épreuves et interpréter graphiquement les résultats, on peut faire usage d'une simulation sur un tableur. Par exemple, la situation suivante :

> Sur un segment S, on prend au hasard deux points A et B. On considère l'événement « La longueur du segment [AB] est strictement supérieure à la moitié de celle du segment S ». Quelle est la probabilité de cet événement ?

peut être simulée à l'aide d'un tableur de la manière suivante. En prenant la longueur de S comme unité, A et B peuvent être déterminés par leurs abscisses qui sont des nombres compris entre 0 et 1, nombres que l'on peut obtenir à l'aide de la fonction ALEA().

	A	B	C	D	E	F
1	Expé-rience N°	Abscisse de A	Abscisse de B	Distance AB	AB > 0,5	Fréquences
2	1	=ALEA()	=ALEA()	=MAX(B2;C2)-MIN(B2;C2)	=SI(D2>0,5;1;0)	=E2/A2
3	=A2+1	=ALEA()	=ALEA()	=MAX(B3;C3)-MIN(B3;C3)	=SI(D3>0,5;1;0)	=SOMME(E$2:E3)/A3
4	=A3+1	=ALEA()	=ALEA()	=MAX(B4;C4)-MIN(B4;C4)	=SI(D4>0,5;1;0)	=SOMME(E$2:E4)/A4

En recopiant la dernière ligne jusqu'à ce qu'on obtienne par exemple 500 expériences, et en utilisant le calcul sur ordre[7], on obtient ainsi les fréquences relatives de l'événement dans autant de séries de 500 expériences qu'on le souhaite. En exploitant les ressources graphiques du tableur, on peut visualiser l'évolution des fréquences au fur et à mesure de l'augmentation du nombre d'expériences.



[5] Voir le paragraphe 2.1 de l'annexe 2.

[6] Le jeu du Franc Carreau est évoqué dans [9] et [10].

[7] Il convient pour cela de désactiver le mode de calcul automatique du tableur, et de passer dans un mode qui selon les logiciels s'appelle “calcul sur ordre” ou “recalculer”, et s'obtient au clavier à l'aide de raccourcis utilisant la touche F9, selon des combinaisons dépendant du système d'exploitation.